Задание 1

$\boxed{\textbf{PC1.}}$ Докажите, что глубина дерева решений для формулы $\mathrm{PHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$ есть $\Omega(n^2)$.

$\boxed{\textbf{PC2.}}$ Формула в КНФ называется Хорновской, если в каждый дизъюнкт входит не более одной переменной без знака отрицания. Покажите, что для любой невыполнимой Хорновской формулы существует дерево решений, размер которого ограничен полиномом от длины формулы.

$\boxed{\textbf{PC3.}}$ (Pebbling contradictions) Пусть $G(V, E)$ — неориентированный граф без циклов. Для кажой вершины заводим пропозициональную переменную и пишем такую формулу: для каждой вершины v из которой идут ребра в вершины $u_1, u_2, \ldots, u_k$, где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $\neg v \vee u_1 \vee u_2 \vee \ldots u_k$ и для одной из вершин w входящей степени 0 добавляем дизъюнкт w. Докажите, что получившаяся формула невыполнима и что существует дерево решений для этой формулы размера $O(|V|)$.

$\boxed{\textbf{PC4.}}$ Покажите, что для любой невыполнимой формулы в 2-КНФ (все дизъюнкты содержат не более двух литералов) есть дерево решений, размер которого ограничен полиномом от числа переменных формулы.

$\boxed{\textbf{PC5.}}$ а) Рассмотрим сюрьективный функциональный принцип Дирихле $\mathrm{ontoFPHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$, который получается добавлением в $\mathrm{PHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$ условий, что каждый кролик сидит не более, чем в одной клетке: $\neg p_{i,j} \vee \neg p_{i,k}$ для всех $i \in [n+1]$ и $j \neq k \in [n]$ и условий, что в каждой клетке кто-то сидит: $p_{1,i} \vee \ldots p_{n+1,i}$ для всех $i \in [n]$. Покажите, что размер минимального дерева решений для $\mathrm{ontoFPHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$ есть $2^{\Theta(n \log n)}$.

б) Рассмотрим формулу $\mathrm{PMP}_{\mathrm{2n+1}}$, кодирующую существование совершенного паросочетания в полном графе на $2n+1$ вершине. Переменные $x_{i,j}$ для $i \neq j \in [2n+1]$ соответствует тому, что ребро (i, j) взято в паросочетание. Дизъюнкты двух видов: 1) у каждой вершины есть пара: $x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \cdots \vee x_{i,2n+1}$ для всех $i \in [2n+1]$; 2) У каждой вершины не более одной пары: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k}$ для всех $i \in [2n+1]$ и $j \neq k \in [2n+1]$. Покажите, что размер минимального дерева решений для $\mathrm{PMP}_{\mathrm{2n+1}}$ есть $2^{\Theta(n \log n)}$.

$\boxed{\textbf{PC6.}}$ Рассмотрим семейство формул $\mathrm{ORDER_n}$, которые кодирует, что есть полный порядок на множестве $[n]$, в котором нет минимального элемента. Переменные $x_{i,j}$, где $i \neq j \in [n]$, означают, что $i < j$. Формула содержит дизъюнкты следующего вида:

- Любые два элементы сравнимы: $x_{i,j} \vee x_{j,i}$ для $i \neq j \in [n]$.
- Антисимметричность порядка: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{j,i}$ для $i \neq j \in [n]$.
- Транзитивность порядка: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{j,k} \vee x_{i,k}$ для $i \neq j \neq k \in [n]$.
- Отсутствие минимального элемента: $\bigvee_{i \neq j} x_{i,j}$ для всех $j \in [n]$.

Покажите, что размер любого дерева решений для $\mathrm{ORDER_n}$ не меньше, чем $2^{\Omega(n)}$.

$\boxed{\textbf{PC7.}}$ Придумать пример семейства невыполнимых формул F_n в k-КНФ размера $poly(n)$, что размер любого дерева решений F_n имеет суперполиномиальный размер (растет быстрее любого полинома).