## Алгоритмы для NP-трудных задач

Лекция 1: Обзор

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ
http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub/



## План лекции





## Цель первых двух лекций

**Привести несколько красивых алгоритмов, не особо вдаваясь в определения и доказательства. Все формальности будут дальше в курсе.**



## План лекции





## Классы P и NP

- Задача поиска (search problem) задаётся алгоритмом $\mathcal{C}$, который получает на вход условие $I$ и кандидата на решение $S$ и имеет время работы, ограниченное некоторым полиномом от $|I|$. $S$ называется решением (solution), если и только если $\mathcal{C}(S, I) = \texttt{true}$.
- NP — класс всех задач поиска. Другими словами, NP — класс всех задач, решение для которых может быть быстро проверено.
- P — класс задач поиска, решение для которых может быть быстро найдено.
- P$\neq$NP? Другими словами, существуют ли задачи, решение для которых может быть быстро проверено, но не может быть быстро найдено? Это один из самых важных и самых сложных открытых вопросов Theoretical Computer Science.



## Сведения

- Говорим, что задача $A$ сводится к (reduces to) задаче $B$, и пишем $A \to B$, если по эффективному алгоритму для задачи $B$ можно построить эффективный алгоритм для задачи $A$.
- По-другому: если $A$ решить сложно и $A \to B$, то и $B$ решить сложно. То есть $B$ не может быть сильно проще $A$.
- Задача поиска называется NP-полной (NP-complete), если к ней сводятся все задачи поиска. То есть это универсальный притягивающий объект в классе NP.
- Удивительно (на первый взгляд), что такие задачи вообще существуют.



## P vs NP

- Большинство исследователей считают, что P$\neq$NP.
- Есть, впрочем, и другие мнения: http://www.win.tue.nl/~gwoegi/P-versus-NP.htm
- В предположении P$\neq$NP не существует полиномиальных алгоритмов для NP-трудных задач.



## Мотивация

- Многим приложениям требуется решать NP-трудные задачи, даже несмотря на то, что решения могут быть найдены только для весьма маленьких размеров входов.
- Лучшее понимание NP-трудных задач.
- Новые интересные комбинаторные и алгоритмические задачи.
- Общая теория.

## План лекции

1. P и NP неформально
2. Точные алгоритмы
   - Задача выполнимости
   - Задача о максимальном разрезе



## Точные алгоритмы для NP-трудных задач

**Алгоритмы, находящие точное решение для данной задачи за время $c^n$ для достаточно малой константы $c$.**



## Мотивация

Представим, что у нас есть алгоритм сложности $1.7^n$ для некоторой задачи, который за "разумное" время позволяет решать примеры этой задачи размера не более $n_0$.

- The "hardware" approach: возьмем в 10 раз более быстрый компьютер. Теперь мы можем решать примеры размера $n_0 + 4$.
- The "brainware" approach: придумаем алгоритм сложности $1.3^n$. Это позволит нам решать примеры размера $2 \cdot n_0$.

Другими словами, уменьшение основания экспоненты времени работы алгоритма увеличивает размер решаемых за данное время примеров в константное число раз, в то время как использование более быстрого компьютера способно увеличить размер лишь на константу.



## План лекции

1. P и NP неформально
2. Точные алгоритмы
   - Задача выполнимости
   - Задача о максимальном разрезе



## Пример

Формула

$$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

невыполнима. То есть переменным $x, y, z$ нельзя присвоить истинностные значения так, чтобы значение формулы стало истиной.



## Задача выполнимости

**Определение**

Задача пропозициональной выполнимости (Boolean satisfiability problem, SAT): определить, выполнима ли данная формула в конъюнктивной нормальной форме, то есть существует ли набор булевых значений переменным формулы, выполняющий формулу. Такой набор называют выполняющим (satisfying assignment), а формулу, для которой такой набор существует, — выполнимой (satisfiable).



## Хэммингово расстояние между наборами

- Набор истинностных значений переменным формулы — это последовательность битов длины $n$, где $n$ — количество переменных формулы. Всего, таким образом, есть $2^n$ различных наборов.

**Определение**

- Хэммингово расстояние двух наборов — количество переменных, которым эти наборы присваивают разные значения.
- Для набора $t \in \{0,1\}^n$ и числа $d$ под Хэмминговым шаром $\mathcal{H}(t,d)$ (с центром в $t$ и радиуса $d$) будем понимать множество всех наборов, находящихся на расстоянии не более чем $d$ от $t$.



## Поиск в шаре

**Поиск в шаре**

Для формулы $F$ в 3-КНФ поиск выполняющего набора в шаре $\mathcal{H}(t,d)$ может быть осуществлен за время $3^d$:

- если $t$ не выполняет $F$, возьмем произвольный невыполненный клоз $C = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$
- рассмотрим три набора, полученных из $t$ изменением значений переменных $x_1$, $x_2$ и $x_3$
- хотя бы один из них будет ближе к выполняющему набору

## $\sqrt{3}^n$-Алгоритм

**Алгоритм**

$\textsc{Simple-3-SAT}(F)$

- проверить, есть ли выполняющий набор в шарах $\mathcal{H}(0^n, n/2)$, $\mathcal{H}(1^n, n/2)$

**Лемма**

Время работы алгоритма $\textsc{Simple-3-SAT}$ есть $\sqrt{3}^n$, где $n = n(F)$ — число переменных формулы $F$.

**Доказательство**

Понятно, что если выполняющий набор есть, то он содержится в одном из рассмотренных двух шаров.



## План лекции

1. P и NP неформально
2. Точные алгоритмы
   - Задача выполнимости
   - Задача о максимальном разрезе



## 3-клика

**Определение**

Задача о 3-клике (3-clique problem) заключается в проверке наличия 3-клики (то есть полного подграфа на трех вершинах) во входном графе.

**Алгоритм**

$\textsc{Matrix-Clique}(G)$

- построить матрицу смежности $A$ графа $G$
- посчитать $A^3$
- вернуть "да", если на диагонали построенной матрицы есть хотя бы одна единица
- вернуть "нет"



## Анализ алгоритма

**Лемма**

Алгоритм выдает правильный ответ за время $O(n^\omega)$, где $\omega \approx 2.376$ — экспонента перемножения матриц (matrix multiplication exponent).

**Доказательство**

- важное свойство матрицы смежности: $A^k[i,j]$ есть количество путей длины $k$ из вершины $i$ в вершину $j$ в графе $G$ (легко доказать по индукции)
- 3-клика — это путь длины 3 из вершины в саму себя
- для вычисления $A^3$ требуется два умножения матриц



## Задача о максимальном разрезе

**Определение**

Задача о максимальном разрезе (maximum cut proble,, MAX-CUT) заключается в нахождении такого разбиения вершин графа на две части, при котором количество ребер, концы которых принадлежат разным частям, максимально.

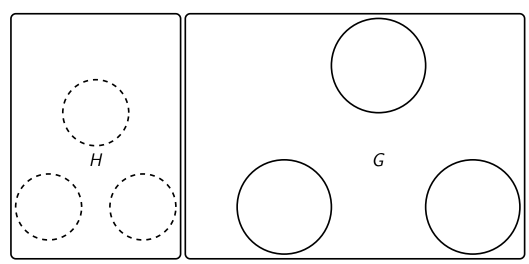
**Основные идеи сведения максимального разреза к 3-клике**

Дан граф $G$ на $n$ вершинах.

- Построим трехдольный граф $H$ на $3 \cdot 2^{n/3}$ вершинах со следующим свойством: исходный граф $G$ имеет разрез веса $w$ тогда и только тогда, когда $H$ содержит 3-клику веса $w$.
- Используем быстрое умножение матриц для поиска 3-клики.
- Сложность: $2^{\omega n/3} \approx 1.732^n$.



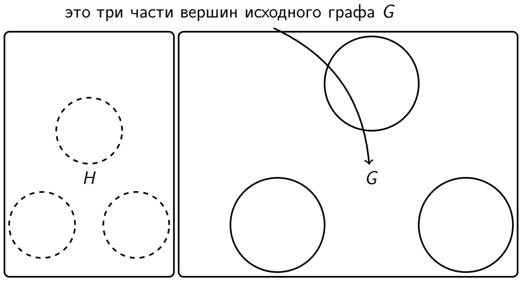
## Вспомогательный граф






## Вспомогательный граф

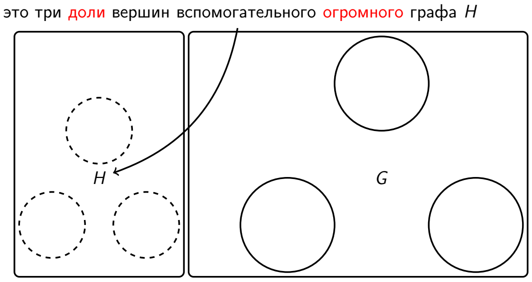
это три части вершин исходного графа $G$





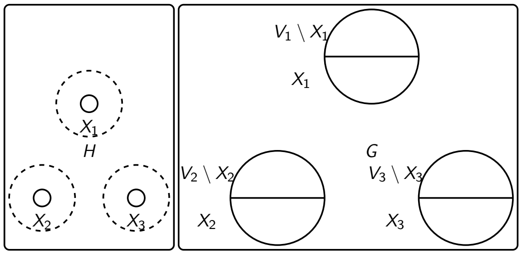

## Вспомогательный граф

это три доли вершин вспомогательного огромного графа $H$



## Вспомогательный граф

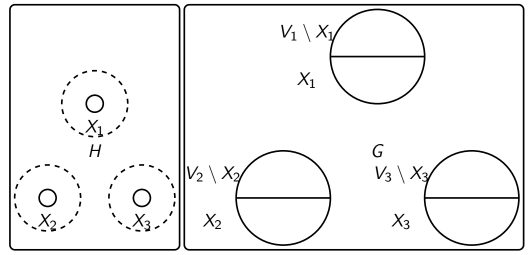
для каждого $X_i \subseteq V_i$ создаём вершину в соответствующей доле $H$






## Вспомогательный граф

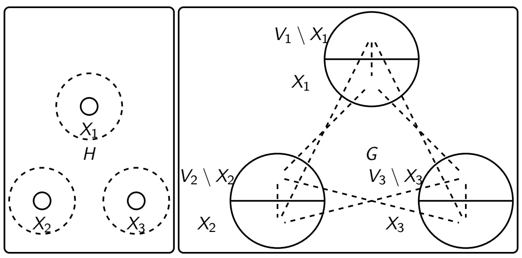
чему равен вес разреза $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ в $G$?





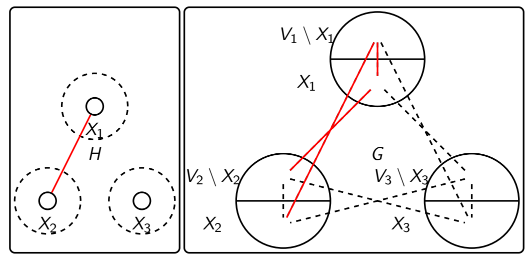

## Вспомогательный граф

чему равен вес разреза $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ в $G$?



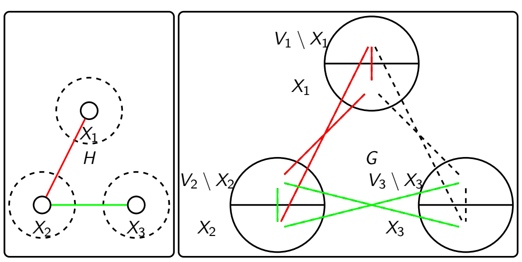



## Вспомогательный граф



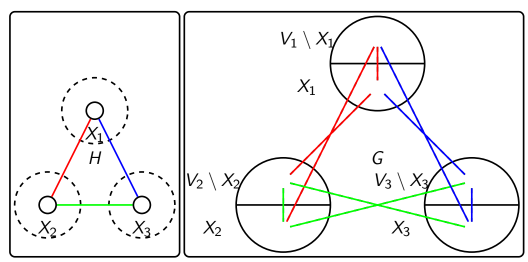



## Вспомогательный граф



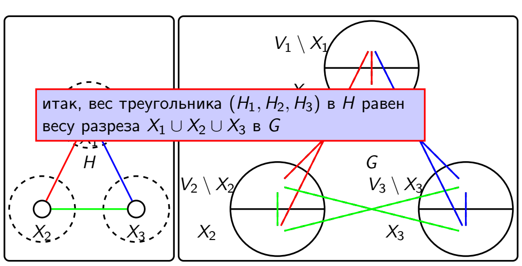



## Вспомогательный граф






## Вспомогательный граф




итак, вес треугольника $(H_1, H_2, H_3)$ в $H$ равен весу разреза $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ в $G$



## Алгоритм

### Алгоритм

MATRIX-MAX-CUT($G$)

- разбить множество вершин $V$ на три равные части $V_1$, $V_2$, $V_3$
- построить вспомогательный трехдольный граф $H$: $i$-я доля $T_i$ содержит все возможные подмножества $V_i$; вес ребра между $X_1$ и $X_2$ равен

$$w(V_2 \setminus X_2, X_1) + w(V_1 \setminus X_1, X_1) + w(V_1 \setminus X_1, X_2)$$

  (для остальных пар долей — аналогично)
- для всех $1 \leq w_{12}, w_{13}, w_{23} \leq |E_G|$
  - оставить только ребра веса $w_{ij}$ между долями $T_i$ и $T_j$
  - проверить, есть ли в модифицированном графе $H$ 3-клика
  - если да, то в $G$ есть разрез веса $w_{12} + w_{13} + w_{23}$
- вернуть максимальную найденную стоимость разреза