Задание 3 (на 26 сентября)

$\boxed{\textbf{PC11.}}$ Покажите, что если у невыполнимой формулы ϕ есть резолюционное доказательство размера S, использующее правила резолюции и ослабления, то есть и опровержение размера не более S, которое использует только правило резолюции. Верно ли это для древовидной и регулярной резолюции?

$\boxed{\textbf{PC12.}}$ Покажите импликационную полноту метода резолюций. Т.е. если из дизъюнктов $C_1, C_2, \ldots, C_k$ семантически следует дизъюнкт D, то D можно вывести из $C_1, C_2, \ldots, C_k$ по правилам резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{PC13.}}$ Снова рассмотрим семейство формул $\mathrm{ORDER_n}$, которые кодирует, что есть полный порядок на множестве $[n]$, в котором нет минимального элемента. Переменные $x_{i,j}$, где $i \neq j \in [n]$, означают, что $i < j$. Формула содержит дизъюнкты следующего вида:

- Любые два элементы сравнимы: $x_{i,j} \vee x_{j,i}$ для $i \neq j \in [n]$.
- Антисимметричность порядка: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{j,i}$ для $i \neq j \in [n]$.
- Транзитивность порядка: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{j,k} \vee x_{i,k}$ для $i \neq j \neq k \in [n]$.
- Отсутствие минимального элемента: $\bigvee_{i \in [n] \setminus \{j\}} x_{i,j}$ для всех $j \in [n]$.

а) Обозначим для $m \in [n]$ и $j \in [n]$ дизъюнкт $C_m(j) = \bigvee_{i \in [m] \setminus \{j\}} x_{i,j}$. Покажите, что для $m \in [n-1]$ все дизъюнкты $C_m(j)$ для $j \in [n]$ можно вывести (в резолюциях) из дизъюнктов $\mathrm{ORDER_n}$ и дизъюнктов $C_{m+1}(j)$ для всех $j \in [n]$ за $O(n^2)$ шагов.

б) Покажите, что существует резолюционное опровержение формулы $\mathrm{ORDER_n}$ размера $O(n^3)$. Тем самым формула $\mathrm{ORDER_n}$ имеет короткое резолюционное доказательство, но не имеет коротких древовидных доказательств (деревьев решений).

$\boxed{\textbf{PC14.}}$ Покажите, что при $m > n$ существует резолюционное опровержение формулы $\mathrm{PHP^m_n}$ размера $2^{O(n)}$.

$\boxed{\textbf{PC15.}}$ Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть все дизъюнкты формулы ϕ зависят только от k переменных с последовательными номерами (т.е. от $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}$ для некоторого $i \in [n-k+1]$). Покажите, что ϕ имеет резолюционное доказательство размера $O(2^k n)$.

$\boxed{\textbf{PC7.}}$ Придумать пример семейства невыполнимых формул F_n в k-КНФ размера $poly(n)$, что размер любого дерева решений F_n имеет суперполиномиальный размер (растет быстрее любого полинома), где k — константа.

$\boxed{\textbf{PC9.}}$ Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть все дизъюнкты формулы ϕ зависят только от k переменных с последовательными номерами (т.е. от $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}$ для некоторого $i \in [n-k+1]$). Покажите, что ϕ имеет дерево решений размера $O(n^k)$.

$\boxed{\textbf{PC10.}}$ Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ, минимальное дерево решений для ϕ имеет размер S (мы договорились считать, что размер дерева — это число листьев). Покажите, что в ассимметричной игре Прувера и Делэера существует стратегия для Делэера, которая гарантирует ему заработать хотя бы $\log S$ монет.