Задание 5 (на 10 октября)

PC22. Покажите, что невыполнимая цейтинская формула для сетки $k \times n$ имеет реализацию резолюционного доказательства размера $n2^{O(k)}$ при этом число дизъюнктов в памяти не превосходит $2^{O(k)}$.

PC23. Рассмотрим следующий способ модификации формулы в КНФ. Для каждого дизъюнкта $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_n$, в который входит более 3-х литералов, мы вводим новые переменные $e_0, e_1, \ldots, e_n$ и заменяем этот дизъюнкт на такие: $e_0, (\neg e_0 \vee \ell_1 \vee e_1), (\neg e_1 \vee \ell_2 \vee e_2), \ldots, (\neg e_{n-1} \vee \ell_n \vee e_n), \neg e_n$. Нетрудно заметить, что исходный дизъюнкт выводится из тех, на которые его заменили. Покажите, что если такую операцию применить к PHP_n^{n+1}, то получится формула, ширина которой $\Omega(n)$.

PC24. Пусть S — множество дизъюнктов, возможно пустое. Обозначем через $neg(S)$ множество дизъюнктов, которое определяется рекурсивно: $neg(\emptyset) = \{\square\}$, $neg(S \cup \{C\}) = \{D \vee \neg a \mid D \in neg(S), a \in C\}$, при этом тривиальные дизъюнкты удаляются, и удаляются дизъюнкты, которые являются надмножеством (ослаблением) других дизъюнктов.

а) Проверьте, что ширина любого дизъюнкта из $neg(S)$ не превосходит $|S|$.

б) Проверьте, что для непустого S множество $neg(S)$ в точности состоит из минимальных по включению нетривиальных дизъюнктов, что из их отрицания семантически следует конъюнкция дизъюнктов из S.

в) Покажите, что набор значений переменных выполняет все дизъюнкты множества S тогда и только тогда, когда он опровергает хотя бы один дизъюнкт из $neg(S)$.

г) Покажите, что если из конъюнкции множества дизъюнктов S семантически следует конъюнкция множества дизъюнктов S', то для каждого дизъюнкта $C \in neg(S)$ существует такой дизъюнкт $C' \in neg(S')$, что C есть ослабление C'.

д) (**Исправлено!**) Пусть $S_0, S_1, \ldots, S_t$ — это реализация резолюционного доказательства для невыполнимой формулы ϕ в k-КНФ, использующая память (clause space) s. Покажите, что $neg(S_t), neg(S_{t-1}), \ldots, neg(S_0)$ можно дополнить до резолюционного доказательства формулы ϕ ширины не более $s + k - 3$.

Определение. Двудольный граф $G(X, Y, E)$ с долями X и Y называется (r, c)-экспандером, если для любого множества $A \subseteq (X)$, если $|A| \leq r$, то $|\Gamma(A)| \geq c|A|$, где $\Gamma(A) = \{v \in Y \mid \exists u \in A : (u, v) \in E\}$ — множество соседей вершин из множества A.

Граф G называется граничным (r, c)-экспандером, если для любого множества $A \subseteq (X)$, если $|A| \leq r$, то $|\delta(A)| \geq c|A|$, где $\delta(A) = \{v \in Y \mid \exists! u \in A : (u, v) \in E\}$ — граница множества A.

PC25. Покажите, что если в двудольном графе $G(X, Y, E)$ степени всех вершин из X не превосходят d и он является (r, c)-экспандером, то он является и граничным $(r, 2c - d)$-экспандером.

PC26. Покажите, что при достаточно большом d, для достаточно больших n с вероятностью 0.9 случайный двудольный регулярный граф, в котором в долях X и Y по n вершин и для каждой вершины из X выбираются случайным образом равновероятно независимо d ребер в вершины множества Y (повторения разрешаются), является $(\frac{n}{10d}, \frac{5}{8}d)$-экспандером.

PC16. (**Исправлено!**) Покажите, что невыполнимая цейтинская формула для сетки $k \times n$ имеет дерево решений размера $n^{O(k)}$.

PC18. (**Исправлено!**) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

PC19. б) Покажите, что если формула ϕ в k-КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S, то за время $n^{O(\log S + k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ.

PC21. Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $Ts_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.