Теорема Курселя. Win/win подход

*St. Petersburg Academic University of the Russian Academy of Sciences

25 Ноября, 2015

Логика второго порядка

Формулы логики в которых разрешено использование:

$$\bigvee, \bigwedge, \neg$$

$$\in, \subseteq, \subset$$

$inc(v, e)$ — ребро e инцидентно вершине v.

$$\forall_{v \in V}, \forall_{e \in E}, \forall_{V \subseteq V}, \forall_{e \subseteq E}$$

$$\exists_{v \in V}, \exists_{e \in E}, \exists_{V \subseteq V}, \exists_{e \subseteq E}$$

$$conn(X) = \forall_{Y \subseteq V}[(\exists_{u \in X} u \in Y \wedge \exists_{v \in X} \neg(v \in Y)) \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u \in X} \exists_{v \in X} inc(u, e) \wedge inc(v, e) \wedge u \in Y \wedge \neg(v \in Y))]$$

Логика второго порядка

Формулы логики в которых разрешено использование:

$$\bigvee, \bigwedge, \neg$$

$$\in, \subseteq, \subset$$

$inc(v, e)$ — ребро e инцидентно вершине v.

$$\forall_{v \in V}, \forall_{e \in E}, \forall_{V \subseteq V}, \forall_{e \subseteq E}$$

$$\exists_{v \in V}, \exists_{e \in E}, \exists_{V \subseteq V}, \exists_{e \subseteq E}$$

$$conn(X) = \forall_{Y \subseteq V}[(\exists_{u \in X} u \in Y \wedge \exists_{v \in X} \neg(v \in Y)) \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u \in X} \exists_{v \in X} inc(u, e) \wedge inc(v, e) \wedge u \in Y \wedge \neg(v \in Y))]$$

Логика второго порядка

Формулы логики в которых разрешено использование:

$$\bigvee, \bigwedge, \neg$$

$$\in, \subseteq, \subset$$

$inc(v, e)$ — ребро e инцидентно вершине v.

$$\forall_{v \in V}, \forall_{e \in E}, \forall_{V \subseteq V}, \forall_{e \subseteq E}$$

$$\exists_{v \in V}, \exists_{e \in E}, \exists_{V \subseteq V}, \exists_{e \subseteq E}$$

$$conn(X) = \forall_{Y \subseteq V} [(\exists_{u \in X} u \in Y \wedge \exists_{v \in X} \neg(v \in Y)) \Rightarrow$$
$$(\exists_{e \in E} \exists_{u \in X} \exists_{v \in X} inc(u, e) \wedge inc(v, e) \wedge u \in Y \wedge \neg(v \in Y))]$$

Логика второго порядка

Формулы логики в которых разрешено использование:

$$\bigvee, \bigwedge, \neg$$

$$\in, \subseteq, \subset$$

$inc(v, e)$ — ребро e инцидентно вершине v.

$$\forall_{v \in V}, \forall_{e \in E}, \forall_{V \subseteq V}, \forall_{e \subseteq E}$$

$$\exists_{v \in V}, \exists_{e \in E}, \exists_{V \subseteq V}, \exists_{e \subseteq E}$$

$$conn(X) = \forall_{Y \subseteq V} [(\exists_{u \in X} u \in Y \wedge \exists_{v \in X} \neg(v \in Y)) \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u \in X} \exists_{v \in X} inc(u, e) \wedge inc(v, e) \wedge u \in Y \wedge \neg(v \in Y))]$$

3 раскрашиваемость

$$3colorability = \exists_{X_1,X_2,X_3 \subseteq V} partition(X_1, X_2, X_3) \wedge ind(X_1) \wedge ind(X_2) \wedge ind(X_3)$$

$$partition(X_1, X_2, X_3) = \forall_{vinV}((v \in X_1) \wedge \neg(v \in X_2) \wedge \neg(v \in X_3)) \vee (\neg(v \in X_1) \wedge (v \in X_2) \wedge \neg(vinX_3)) \vee (\neg(v \in X_1) \wedge \neg(v \in X_2) \wedge (vinX_3))]$$

$$indp(X) = \forall_{u,v \in X} \neg adj(u, v)$$

3 раскрашиваемость

$$3colorability = \exists_{X_1, X_2, X_3 \subseteq V} partition(X_1, X_2, X_3) \wedge \\ ind(X_1) \wedge ind(X_2) \wedge ind(X_3)$$

$$partition(X_1, X_2, X_3) = \forall_{vinV} ((v \in X_1) \wedge \neg(v \in X_2) \wedge \neg(v \in X_3)) \\ \vee (\neg(v \in X_1) \wedge (v \in X_2) \wedge \neg(vinX_3)) \\ \vee (\neg(v \in X_1) \wedge \neg(v \in X_2) \wedge (vinX_3))]$$

$$indp(X) = \forall_{u,v \in X} \neg adj(u, v)$$

3 раскрашиваемость

$$3colorability = \exists_{X_1,X_2,X_3\subseteq V} partition(X_1,X_2,X_3)\wedge \\ ind(X_1)\wedge ind(X_2)\wedge ind(X_3)$$

$$partition(X_1,X_2,X_3) = \forall_{vinV}((v\in X_1)\wedge\neg(v\in X_2)\wedge\neg(v\in X_3)) \\ \vee(\neg(v\in X_1)\wedge(v\in X_2)\wedge\neg(vinX_3)) \\ \vee(\neg(v\in X_1)\wedge\neg(v\in X_2)\wedge(vinX_3))]$$

$$indp(X) = \forall_{u,v\in X}\neg adj(u,v)$$

Теорема Курселя

Theorem

Пусть φ — MSO_2 формула и G — граф на n-вершинах, интерпритация всех свободных переменных формулы φ задана в графе G. Предположим задано древесное разложение графа G ширины t. Тогда существует алгоритм, который проверяет выполнимость φ в G за время $f(||\varphi||, t) \cdot n$ для некоторой вычислимой функции f.

Найти вершинное покрытие содержащее не более k вершин.

$$|X| \leq k \wedge \forall_{e \in E} \exists_{x \in X} inc(x, e)$$

Не является MSO_2 формулой!

$$\exists_{x_1, x_2, \dots x_k} \forall_{e \in E} \bigvee_{i=1}^{k} inc(x_i, e)$$

Длина формулы зависит от k, поэтому получаем только $f(t, k) \cdot n$ алгоритм.

Теорема Курселя

Theorem

Пусть φ — MSO_2 формула и G — граф на n-вершинах, интерпритация всех свободных переменных формулы φ задана в графе G. Предположим задано древесное разложение графа G ширины t. Тогда существует алгоритм, который проверяет выполнимость φ в G за время $f(||\varphi||, t) \cdot n$ для некоторой вычислимой функции f.

Найти вершинное покрытие содержащее не более k вершин.

$$|X| \leq k \wedge \forall_{e \in E} \exists_{x \in X} inc(x, e)$$

Не является MSO_2 формулой!

$$\exists_{x_1, x_2, \ldots x_k} \forall_{e \in E} \bigvee_{i=1}^{k} inc(x_i, e)$$

Длина формулы зависит от k, поэтому получаем только $f(t, k) \cdot n$ алгоритм.

Теорема Курселя

Theorem

Пусть φ *—* MSO_2 *формула и* G *— граф на* n*-вершинах, интерпритация всех свободных переменных формулы* φ *задана в графе* G*. Предположим задано древесное разложение графа* G *ширины* t*. Тогда существует алгоритм, который проверяет выполнимость* φ *в* G *за время* $f(||\varphi||, t) \cdot n$ *для некоторой вычислимой функции* f*.*

Найти вершинное покрытие содержащее не более k вершин.

$$|X| \leq k \wedge \forall_{e \in E} \exists_{x \in X} inc(x, e)$$

Не является MSO_2 формулой!

$$\exists_{x_1, x_2, \ldots x_k} \forall_{e \in E} \bigvee_{i=1}^{k} inc(x_i, e)$$

Длина формулы зависит от k, поэтому получаем только $f(t, k) \cdot n$ алгоритм.

Теорема Курселя

Theorem

Пусть φ — MSO_2 формула с p свободными переменными $X_1, X_2, \ldots X_p$ и $\alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots x_p)$ аффинная функция. Предположим нам дан граф G на n вершинах вместе с древесным разложением ширины t. Будем считать, что нам также задана интерпритация всех свободных переменных формулы φ, кроме переменных $X_1, X_2, \ldots X_p$. Тогда существует алгоритм который за время $f(||\varphi, t||) \cdot n$ находит минимальное и максимальное значение функции $\alpha(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_p|)$, где $X_1, X_2, \ldots X_p$ выполняют формулу $\varphi(\cdot)$, то есть $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_p) = true$. f — некоторая вычислимая функция.

$$vcover(X) = \forall_{e \in E} \exists_{x \in X} inc(x, e)$$

$$\alpha(X) = |X|$$

Теорема Курселя

Theorem

Пусть φ *—* MSO_2 *формула с* p *свободными переменными* $X_1, X_2, \dots X_p$ *и* $\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots x_p)$ *аффинная функция. Предположим нам дан граф* G *на* n *вершинах вместе с древесным разложением ширины* t*. Будем считать, что нам также задана интерпритация всех свободных переменных формулы* φ*, кроме переменных* $X_1, X_2, \dots X_p$*. Тогда существует алгоритм который за время* $f(||\varphi, t||) \cdot n$ *находит минимальное и максимальное значение функции* $\alpha(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_p|)$*, где* $X_1, X_2, \dots X_p$ *выполняют формулу* $\varphi(\cdot)$*, то есть* $\varphi(X_1, X_2, \dots X_p) = true$*.* f *— некоторая вычислимая функция.*

$$vcover(X) = \forall_{e \in E} \exists_{x \in X} inc(x, e)$$

$$\alpha(X) = |X|$$

Вершинное покрытие

- Вершинное покрытие $\leq k \Rightarrow tw(G) \leq k$
- Найдем древесное разложение размера $4k + 4$
- Решим задачу за время $O^*(2^{tw}) = O^*(2^{4k+4})$

Вершинное покрытие

- Вершинное покрытие $\leq k \Rightarrow tw(G) \leq k$
- Найдем древесное разложение размера $4k + 4$
- Решим задачу за время $O^*(2^{tw}) = O^*(2^{4k+4})$

Вершинное покрытие

- Вершинное покрытие $\leq k \Rightarrow tw(G) \leq k$
- Найдем древесное разложение размера $4k + 4$
- Решим задачу за время $O^*(2^{tw}) = O^*(2^{4k+4})$

Теорема о решетке

Theorem (Excluded grid theorem)

Существует функция $g(t) = O(t^{98+o(1)})$ такая, что любой граф с древесной шириной больше $g(t)$ содержит решетку $t \times t$.

Theorem (Planar Excluded Grid Theorem)

Пусть $t \geq 0$. Любой планарный граф G с древесной шириной не менее $9t/2$ содержит решетку $t \times t$ в качестве минора. Более того, для любого ε существует $O(n^2)$ алгоритм, который по заданному n-вершинному планарному графу и целому t или выдает древесное разложение графа G ширины не более $9/2 + \varepsilon$ или находит минор решетку $t \times t$ в G.

Corollary

Ширина древесного разложения планарного графа G на n вершинах не превосходит $\frac{9}{2}\lceil\sqrt{n+1}\rceil$. Более того, для любого ε, древесное разложение ширины не более $(\frac{9}{2}+\varepsilon)\lceil\sqrt{n+1}\rceil$ может быть построенои за $O(n^2)$ время.

Теорема о решетке

Theorem (Excluded grid theorem)

Существует функция $g(t) = O(t^{98+o(1)})$ *такая, что любой граф с древесной шириной больше* $g(t)$ *содержит решетку* $t \times t$.

Theorem (Planar Excluded Grid Theorem)

Пусть $t \geq 0$. *Любой планарный граф* G *с древесной шириной не менее* $9t/2$ *содержит решетку* $t \times t$ *в качестве минора. Более того, для любого* ε *существует* $O(n^2)$ *алгоритм, который по заданному* n*-вершинному планарному графу и целому* t *или выдает древесное разложение графа* G *ширины не более* $9/2 + \varepsilon$ *или находит минор решетку* $t \times t$ *в* G.

Corollary

Ширина древесного разложения планарного графа G *на* n *вершинах не превосходит* $\frac{9}{2}\lceil\sqrt{n+1}\rceil$. *Более того, для любого* ε, *древесное разложение ширины не более* $(\frac{9}{2}+\varepsilon)\lceil\sqrt{n+1}\rceil$ *может быть построенои за* $O(n^2)$ *время.*

Теорема о решетке

Theorem (Excluded grid theorem)

Существует функция $g(t) = O(t^{98+o(1)})$ *такая, что любой граф с древесной шириной больше* $g(t)$ *содержит решетку* $t \times t$.

Theorem (Planar Excluded Grid Theorem)

Пусть $t \geq 0$. *Любой планарный граф* G *с древесной шириной не менее* $9t/2$ *содержит решетку* $t \times t$ *в качестве минора. Более того, для любого* ε *существует* $O(n^2)$ *алгоритм, который по заданному* n*-вершинному планарному графу и целому* t *или выдает древесное разложение графа* G *ширины не более* $9/2 + \varepsilon$ *или находит минор решетку* $t \times t$ *в* G.

Corollary

Ширина древесного разложения планарного графа G *на* n *вершинах не превосходит* $\frac{9}{2}\lceil\sqrt{n+1}\rceil$. *Более того, для любого* ε*, древесное разложение ширины не более* $(\frac{9}{2}+\varepsilon)\lceil\sqrt{n+1}\rceil$ *может быть построенои за* $O(n^2)$ *время.*

Теорема о решетке

Theorem (Planar Excluded Grid Theorem for edge contractions)

Для любого связного планарного графа G и $t \geq 0$, если $tw(G) \geq 9t + 5$, то G содержит триангулированную решетку в качестве стягивания. Для любого ε, существует алгоритм с временем работы $O(n^2)$ находяший триангулировнную решетку или выдающий древесное разложение размера не больше $(9 + \varepsilon)t + 5$.

Теорема о решетке

Theorem (Planar Excluded Grid Theorem for edge contractions)

Для любого связного планарного графа G и $t \geq 0$, если $tw(G) \geq 9t + 5$, то G содержит триангулированную решетку в качестве стягивания. Для любого ε, существует алгоритм с временем работы $O(n^2)$ находяший триангулировнную решетку или выдающий древесное разложение размера не больше $(9 + \varepsilon)t + 5$.

Планарное вершинное покрытие

- Вершинное покрытие решетки $t \times t$ не меньше $t^2/2$
- По заданному древесному разложению можно найти вершинное покрытие за время $O^*(2^{tw})$
- Размер вершинного покрытия минора H не превосходит размер вершинного покрытия первоначального графа

C1 Размер любого решения для решетки $t \times t$ не менее $\Omega(t^2)$

C2 Если задано древесное разложение ширины t, то задача может быть решена за время $2^O(t)n^O(1)$.

C3 Задача является монотонной относительно миноров, то есть если G содержит решения размера не больше k, тогда любой минор графа G содержит решение не больше k.

Планарное вершинное покрытие

- Вершинное покрытие решетки $t \times t$ не меньше $t^2/2$
- По заданному древесному разложению можно найти вершинное покрытие за время $O^*(2^{tw})$
- Размер вершинного покрытия минора H не превосходит размер вершинного покрытия первоначального графа

C1 Размер любого решения для решетки $t \times t$ не менее $\Omega(t^2)$

C2 Если задано древесное разложение ширины t, то задача может быть решена за время $2^O(t)n^O(1)$.

C3 Задача является монотонной относительно миноров, то есть если G содержит решения размера не больше k, тогда любой минор графа G содержит решение не больше k.

Планарное вершинное покрытие

- Вершинное покрытие решетки $t \times t$ не меньше $t^2/2$
- По заданному древесному разложению можно найти вершинное покрытие за время $O^*(2^{tw})$
- Размер вершинного покрытия минора H не превосходит размер вершинного покрытия первоначального графа

C1 Размер любого решения для решетки $t \times t$ не менее $\Omega(t^2)$

C2 Если задано древесное разложение ширины t, то задача может быть решена за время $2^O(t)n^O(1)$.

C3 Задача является монотонной относительно миноров, то есть если G содержит решения размера не больше k, тогда любой минор графа G содержит решение не больше k.

Планарное вершинное покрытие

- Вершинное покрытие решетки $t \times t$ не меньше $t^2/2$
- По заданному древесному разложению можно найти вершинное покрытие за время $O^*(2^{tw})$
- Размер вершинного покрытия минора H не превосходит размер вершинного покрытия первоначального графа

C1 Размер любого решения для решетки $t \times t$ не менее $\Omega(t^2)$

C2 Если задано древесное разложение ширины t, то задача может быть решена за время $2^O(t)n^O(1)$.

C3 Задача является монотонной относительно миноров, то есть если G содержит решения размера не больше k, тогда любой минор графа G содержит решение не больше k.

Планарное вершинное покрытие

- Вершинное покрытие решетки $t \times t$ не меньше $t^2/2$
- По заданному древесному разложению можно найти вершинное покрытие за время $O^*(2^{tw})$
- Размер вершинного покрытия минора H не превосходит размер вершинного покрытия первоначального графа

C1 Размер любого решения для решетки $t \times t$ не менее $\Omega(t^2)$

C2 Если задано древесное разложение ширины t, то задача может быть решена за время $2^O(t)n^O(1)$.

C3 Задача является монотонной относительно миноров, то есть если G содержит решения размера не больше k, тогда любой минор графа G содержит решение не больше k.

Планарное вершинное покрытие

- Вершинное покрытие решетки $t \times t$ не меньше $t^2/2$
- По заданному древесному разложению можно найти вершинное покрытие за время $O^*(2^{tw})$
- Размер вершинного покрытия минора H не превосходит размер вершинного покрытия первоначального графа

C1 Размер любого решения для решетки $t \times t$ не менее $\Omega(t^2)$

C2 Если задано древесное разложение ширины t, то задача может быть решена за время $2^O(t)n^O(1)$.

C3 Задача является монотонной относительно миноров, то есть если G содержит решения размера не больше k, тогда любой минор графа G содержит решение не больше k.

Thank you for your attention!