Worst-case дизайн и приближённая оптимальность

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

1. Оптимальность в худшем случае: определения
   - Продажа цифрового товара
   - Оптимальность и приближённая оптимальность
   - Бенчмарка $F^{(2)}$
2. Приближаемся к $F^{(2)}$
   - Примеры и DOP
   - Детерминированные симметрические аукционы
   - RSOP

Постановка

- Пусть у нас есть некая вещь и N агентов, которые хотят её купить.
- У агентов есть свои цены x_i.
- Но у нас теперь есть N копий вещи, так что мы можем хоть каждому агенту продать.
- Так происходит с цифровыми товарами, которые можно копировать.

Оптимальный алгоритм

- Конечно, самый правильный механизм — это раздать всем бесплатно и попросить donations. :)
- Но мы сейчас побудем злым Диснеем или кто там ещё.

Оптимальный алгоритм

- В принципе, совсем оптимальный алгоритм продал бы просто всем по их стоимостям:

$$\mathrm{Revenue} = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i.$$

- Но это типа нечестно: победители платят разные цены.
- Надо всё-таки честно продавать, а то пацаны не поймут.
- Какой тогда будет оптимальный алгоритм?

Оптимальный алгоритм

- Правильно, выбрать цену, которая максимизирует доход:

$$\mathrm{Revenue} = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \max_p p \times \{\text{к-во участников с } x_i \geq p\}.$$

- Введём обозначение: $x_{(i)}$ — это i-я по величине ценность (например, $x_{(1)} = \max_i x_i$).
- Тогда

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \max_i i x_{(i)}.$$

$\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$

- С одной стороны, очевидно, что

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{T}(\mathbf{x}).$$

- $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ вообще самый максимум, что только бывает.
- А что в другую сторону?

$\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$

Теорема

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{H}_N \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad \text{где } \mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

Эта оценка точна (равенство реализуется).

$\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ и $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$

- Давайте докажем. $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \max_i ix_{(i)}$. Значит,

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_{(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{ix_i}{i} \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{x})}{i} = \mathcal{H}_N \mathcal{F}(\boldsymbol{x}).$$

$\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ и $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$

- А пример, реализующий оценку, нам ещё пригодится потом. Рассмотрим $x_i = \frac{1}{i}$.
- Это называется *вход равного дохода*, потому что $ix_{(i)} = 1 = \mathcal{F}(\boldsymbol{x})$ для всех i.
- Очевидно, что $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{H}_N$ в данном случае.

Оптимальность в худшем случае

- Мы сегодня от теории игр немного отвлечёмся и будем рассматривать дело в контексте скорее теоретической информатики.
- Вместо равновесий и алгоритмов, оптимальных в ожидании по распределениям, у нас теперь будет оптимальность в худшем случае.
- Иначе говоря, механизм оптимален, если он оптимально действует на каждом входе $\boldsymbol{x}$.
- При этом, как обычно, будем требовать правдивость (по эквивалентности).

Неоптимальность

- Очевидно, ничего подобного быть не может.

Упражнение. Постройте такие примеры входов x, что один и тот же правдивый аукцион никак не сможет быть оптимальным на каждом из них.
Hint: достаточно одного агента.

Что же делать

- Что же делать?

Что же делать

- Что же делать?
- Будем делать то, что всегда делают в информатике: рассматривать субоптимальные решения и вводить какую-нибудь меру оптимальности.
- А потом мучительно доказывать, что бывают x-оптимальные механизмы, но не бывает y-оптимальных относительно меры z... :)

Бенчмарки

- *Бенчмарка прибыли* (profit benchmark) — это некоторая функция $\mathcal{G} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, которая отображает вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ в желаемую прибыль.
- Бенчмарка не обязательно должна быть совсем максимальной прибылью, полезно с разными функциями сравнивать.
- Мы уже две бенчмарки видели — это $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ и $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$.

Степень оптимальности

Определение

Степень оптимальности аукциона $\mathcal{A}$ относительно бенчмарки $\mathcal{G}$ — это $\beta = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathcal{G}(\mathbf{x})}{\mathcal{A}(\mathbf{x})}$. Будем говорить в таком случае, что $\mathcal{A}$ β–оптимален относительно $\mathcal{G}$.

Определение

Аукцион $\mathcal{A}$ оптимален относительно бенчмарки $\mathcal{G}$, если у него максимальная степень оптимальности относительно $\mathcal{G}$ среди всех аукционов.

Пример утверждения

Теорема

Для входов $\mathbf{x}$, $x_i \in [1, h]$, ни для какого N не существует аукциона, $o(\log h)$–оптимального относительно $\mathcal{T}(\mathbf{x})$.

Упражнение. Докажите это.

Следствие

- Но из этого ещё и интересное следствие следует.
- При $N = 2$ разница между $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ константна: $\mathcal{F}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{T}(\mathbf{x})/2$.

Следствие

При $N = 2$ для входов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $x_i \in [1, h]$, не существует аукциона, $o(\log h)$–оптимального относительно $\mathcal{F}(\mathbf{x})$.

Что же делать

- Это следствие значит, что мы не можем одного агента с максимальным x_i заставить заплатить константную долю своей ценности. Действительно не можем.
- Получается, что и к $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$ мы не приблизимся толком.
- Что же делать? Какую же выбрать бенчмарку, чтобы к ней можно было приблизиться?
- Как ни странно, всё начнёт работать, как только мы откажемся иметь дело с *одним* максимальным агентом.

$\mathcal{F}^{(2)}$

- Обозначим через $\mathcal{F}^{(2)}$ оптимальную прибыль с по крайней мере двумя победителями по одной и той же цене:

$$\mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \max_{i \geq 2} i x_{(i)}.$$

- Тогда получится, что для β-оптимального относительно $\mathcal{F}^{(2)}$ аукциона $\mathcal{A}$ для малой константы β

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \geq \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) \approx \mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{x}) \geq \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \geq \frac{\mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{x})}{\beta} \geq \frac{\mathcal{T}(\boldsymbol{x})}{\beta \log n}.$$

Outline

1. Оптимальность в худшем случае: определения
   - Продажа цифрового товара
   - Оптимальность и приближённая оптимальность
   - Бенчмарка $F^{(2)}$
2. Приближаемся к $F^{(2)}$
   - Примеры и DOP
   - Детерминированные симметрические аукционы
   - RSOP

Пример I

- Отныне мы будем пытаться соорудить аукцион, который был бы β-оптимальным относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.
- Первые примеры покажут, что оптимальная цена продажи зависит от конкретного вектора $\boldsymbol{x}$.

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
  - 50 ставок по \$10 и
  - 50 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- Какие будут R_1 и R_{10}?

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
  - 50 ставок по \$10 и
  - 50 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- $R_{10} = 500$, $R_1 = 100$ (все выиграют и заплатят по \$1).
- Ясно, что $\mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = R_{10} = \$500$.

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
  - 5 ставок по \$10 и
  - 95 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- Какие будут R_1 и R_{10}?

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
  - 5 ставок по \$10 и
  - 95 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- $R_{10} = 50$, $R_1 = 100$.
- Ясно, что $\mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = R_1 = \$100$.

Оптимальная цена

- Очевидно, для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ есть цена, на которой механизм достигает оптимума.

Определение

Оптимальная цена для вектора ценностей $\boldsymbol{x}$ *— это*

$$\mathrm{opt}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{argmax}_p \{p \times \text{“к-во агентов с } v_i \geq p\text{”}\}.$$

Детерминированный аукцион оптимальной цены

- Мы уже отмечали, что всякий правдивый аукцион описывается ценой, которую предлагают агенту i, причём она не зависит от его собственной ценности, т.е. это функция $t_i(\boldsymbol{b}_{-i})$.
- Так что вполне естественно было бы предложить такую идею аукциона: давать каждому цену

$$t_i(\boldsymbol{b}_{-i}) = \mathrm{opt}(\boldsymbol{b}_{-i}).$$

- Это называется *детерминированный аукцион оптимальной цены* (Deterministic Optimal Price auction, DOP).

Свойства DOP

- Во-первых, по определению DOP правдив.
- Но насколько он хорош? Будет ли он β-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$?

Пример II

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
    - 10 ставок по $10 и
    - 90 ставок по $1.
- Какие цены предложит DOP?

Пример II

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
  - 10 ставок по \$10 и
  - 90 ставок по \$1.
- $\boldsymbol{b}_{-1}$ — это вектор из 89 ставок по \$1 и 10 ставок по \$10, поэтому $\mathrm{opt}(\boldsymbol{b}_{-1}) = \$10$.
- $\boldsymbol{b}_{-10}$ — это вектор из 90 ставок по \$1 и 9 ставок по \$10, поэтому $\mathrm{opt}(\boldsymbol{b}_{-10}) = \$1$.

Пример II

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
  - 10 ставок по \$10 и
  - 90 ставок по \$1.
- Получается, что DOP принимает ставки по \$10, но даёт им цену \$1, а ставки по \$1 вообще отвергает.
- В результате прибыль равна \$10 вместо $\mathcal{F}^{(2)} = 100$.
- Этот пример можно сделать и ещё хуже, для любой константы.

DOP не помогает

- В общем, DOP не особенно справляется.
- Что же делать?
- В случае детерминированных симметрических аукционов — ничего...

Теорема о невозможности

Теорема

Ни один детерминированный симметрический аукцион не является константно–оптимальным относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

Доказательство

- Наша задача — для каждого детерминированного симметрического аукциона найти такую серию примеров, на которой он будет всё хуже и хуже относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.
- Будем рассматривать векторы ставок $\boldsymbol{b}$ со ставками $b_i \in \{1, h\}$ (нам и таких хватит).
- Обозначим через $n_h(\boldsymbol{b})$ и $n_1(\boldsymbol{b})$ количества ставок h и 1 в нашем векторе.

Доказательство

- Обозначим через $n_h(\boldsymbol{b})$ и $n_1(\boldsymbol{b})$ количества ставок h и 1 в нашем векторе.
- Что значит, что аукцион $\mathcal{A}$ симметрический?
- Это значит, что цена $t_i(\boldsymbol{b}_{-i})$ от i не зависит, и является только функцией от $n_h(\boldsymbol{b}_{-i})$ и $n_1(\boldsymbol{b}_{-i})$.
- Иначе говоря, цена — это функция $t(n_h, n_1)$; чтобы получить цену для каждого агента, нужно туда подставить $n_h(\boldsymbol{b}_{-i})$ и $n_1(\boldsymbol{b}_{-i})$.
- И, наконец, предположим, что $t(n_h, n_1) \in \{1, h\}$, потому что в остальных случаях прибыль (со ставками $b_i \in \{1, h\}$) будет никак не больше.

Доказательство

- Предположим, что аукцион константно–оптимальный.
- Какие должны быть для этого свойства функции $t(n_h, n_1)$?
- Во-первых, для всех m $t(m, 0) = h$, иначе мы на входе из всех h добудем прибыль только n, а оптимальный — $\mathcal{F}^{(2)} = hn$.
- И будем мы h-оптимальными, а это не константа!

Доказательство

- Предположим, что аукцион константно–оптимальный.
- Какие должны быть для этого свойства функции $t(n_h, n_1)$?
- С другой стороны, для всех m $t(0, m) = 1$, иначе мы на входе из всех 1 вообще ничего не заработаем.
- А $\mathcal{F}^{(2)} = n$, что куда больше. :)

Доказательство

- Рассмотрим теперь достаточно большое m и посмотрим на $t(k, m-k)$.
- Для $k = 0$ эта функция равна 1, для $k = m$ она равна h.
- Значит, где-то есть $k^* = \min\{k : t(k, m-k) = h\}$.
- Давайте его зафиксируем и рассмотрим вход из $m+1$ ставки, где $n_h(\boldsymbol{b}) = k^*$, и $n_1(\boldsymbol{b}) = m - k^* + 1$.

Доказательство

- Тогда агентам, которые ставят 1, мы предложим $t(n_h(\boldsymbol{b}_{-1}), n_1(\boldsymbol{b}_{-1})) = t(k^*, m - k^*) = h$. И все агенты, ставившие 1, не принесут никакой прибыли.
- А агентам, которые ставят h, мы предложим $t(n_h(\boldsymbol{b}_{-h}), n_1(\boldsymbol{b}_{-h})) = t(k^* - 1, m - k^* + 1) = 1$. И они принесут прибыль k^*.
- Но тогда для, например, $h = n$ $\mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = nk^*$, а наша прибыль — только k^*. Противоречие.

Что делать?

- Теорема — это, конечно, ужас.
- Но не ужас-ужас-ужас.
- Она запрещает *детерминированные симметрические* аукционы.
- Оказывается, что и вероятностные есть, и детерминированные несимметрические... мы сейчас один вероятностный рассмотрим.

RSOP

Определение

Вероятностный аукцион оптимальной цены (Random Sampling Optimal Price, RSOP) работает следующим образом.

- *Разделить случайно* $\mathbf{b}$ *на две части, относя каждого агента к* $\mathbf{b}'$ *или* $\mathbf{b}''$ *с вероятностью* $\frac{1}{2}$.
- *Вычислить* $t' = \mathrm{opt}(\mathbf{b}')$ *и* $t'' = \mathrm{opt}(\mathbf{b}'')$ *— оптимальные цены для каждой из частей.*
- *Предложить* t' *агентам из* $\mathbf{b}''$, *а* t'' *— агентам из* $\mathbf{b}'$.

- Сразу отметим, что RSOP правдив, потому что цена есть функция от других ставок, не от ставки самого агента.

Нижняя оценка

Теорема

RSOP не менее чем 4-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- Для доказательства достаточно построить пример.
- Рассмотрим вектор ставок $\boldsymbol{b} = (\$1, \$2)$.

Нижняя оценка

Теорема

RSOP не менее чем 4-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- С вероятностью $\frac{1}{2}$ обе ставки попадают в одну часть, и прибыль RSOP равна 0.
- В противном случае, $\boldsymbol{b}' = \{\$1\}$, $\boldsymbol{b}'' = \{\$2\}$, и $t' = \$1$, $t'' = \$2$.

Нижняя оценка

Теорема

RSOP не менее чем 4-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- То есть RSOP отвергнет ставку в \$1 и продаст ставке \$2 за \$1.
- Ожидание прибыли RSOP получается \$.50.
- А $\mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{b}) = \$2$. Значит, RSOP не менее чем 4-оптимален.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- Рассмотрим вектор ставок $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_N)$, отсортированный по убыванию.
- Мы делим $\boldsymbol{b}$ на две части.
- Назовём ту, куда попал b_1, *плохой*, а другую — *хорошей*.
- Предположим, что $b_1 \geq \mathcal{F}^{(2)}(\boldsymbol{b})$ (увеличение самой большой ставки может сделать только хуже).

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- Обозначим $X_i \in \{0, 1\}$ случайную величину, индикатор того, что агент i на хорошей стороне.
- По определению, $X_1 = 0$.
- Обозначим $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_i$ количество агентов со ставкой $\geq b_i$ на хорошей стороне.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- S_i — это случайная величина, поведение которой можно описать случайным блужданием:
    - случайная величина S_i блуждает по прямой, начиная с 0 во время $i = 1$;
    - или движемся вправо, или остаёмся на месте в каждый момент с вероятностью $\frac{1}{2}$;
    - а случайная величина $\mathcal{E}_\alpha$ — это то, что для всех i $\frac{S_i}{i} \leq \alpha$;
    - нас будет особенно интересовать $\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}$.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- Обозначим i^* номер агента, чья ставка b_{i^*} максимизирует доход на хорошей стороне, т.е. $\forall j\ S_{i^*}b_{i^*} \geq S_j b_j$.
- Тогда доход RSOP только на плохой стороне не меньше, чем

$$\mathrm{Rev} = (i^* - S_{i^*})b_{i^*}$$

(общее к-во агентов со ставкой $\geq b_{i^*}$ минус к-во агентов с такими ставками на хорошей стороне).
- Мы хотим показать, что $\mathrm{Rev} \geq \frac{\mathcal{F}^{(2)}}{15}$.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- $\mathcal{F}^{(2)}$ получается из i' — номера ставки, которая оптимальна для *всех*, не только хорошей стороны, т.е. $i' b_{i'} \geq j b_j$ для всех $j \geq 2$.
- Ограничимся пока случаем, когда i' чётный.
- Рассмотрим случайное событие $\mathcal{B} = \{S_{i'} \geq \frac{i'}{2}\}$.
- i' чётный, значит, $\Pr[\mathcal{B}] = \frac{1}{2}$ ($\mathcal{B}$ — это когда большинство из i' наивысших ставок, кроме самой большой, на хорошей стороне).

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- Значит, оптимальная прибыль от хорошей стороны равна

$$S_{i^*} b_{i^*} \geq S_{i'} b' \geq \frac{\mathcal{F}^{(2)}}{2}.$$

- А в случае события $\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}$ $S_i \leq \frac{3}{4} i$, и

$$(i - S_i) b_i \geq \frac{1}{4} i b_i \geq \frac{1}{3} S_i b_i.$$

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $\mathcal{F}^{(2)}$.

- В случае же $\mathcal{E}_{\frac{3}{4}} \cap \mathcal{B}$

$$\mathrm{Rev} = (i^* - S_i)b_i \geq \frac{1}{3} S_{i^*} b_{i^*} \geq \frac{\mathcal{F}^{(2)}}{6}, \text{ и}$$

$$\boldsymbol{E}\,[\mathrm{Rev}] \geq \Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}} \cap \mathcal{B}] \frac{\mathcal{F}^{(2)}}{6} \geq \frac{\mathcal{F}^{(2)}}{15},$$

т.к. $\Pr[\mathcal{B}] = \frac{1}{2}$, а $\Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}] \geq 0.9$.

Лемма

- Нам осталось доказать, что $\Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}] \geq 0.9$.

Лемма

$$\Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}] = 1 - \frac{1}{81}\left(\left(17+3\sqrt{33}\right)^{1/3} - 1 - 2\left(17+3\sqrt{33}\right)^{-1/3}\right)^{4}.$$

Доказательство леммы

- Мы подсчитываем $\Pr[\mathcal{E}_\alpha]$. Рассмотрим $\alpha = \frac{k-1}{k}$ для целого k ($\frac{3}{4}$ подходят).
- Тогда условие $\frac{S_i}{i} \leq \alpha$ можно переписать как $(k-1)(i-S_i) - S_i \geq 0$.

Доказательство леммы

- Рассмотрим новое блуждание $Z_i = (k-1)(i - S_i) - S_i$.
- Z_i на каждом шаге с вероятностью $\frac{1}{2}$ либо увеличивается на $(k-1)$, либо уменьшается на 1; начинается он с $Z_1 = k - 1$.
- Теперь $\Pr[\mathcal{E}_\alpha]$ — это вероятность смерти (ruin) этого блуждания; обозначим через

$$p_j = \Pr\left[\exists i : Z_i = Z_1 - j\right].$$

Нас тогда интересует p_k (чтобы уйти ниже нуля).

Доказательство леммы

- Блуждание без памяти, уменьшается всегда на 1, поэтому $p_j = (p_1)^j$.
- А между p_1 и p_k есть зависимость:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_k = \frac{1}{2}(1 + p_1^k).$$

Доказательство леммы

- $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_k = \frac{1}{2}(1 + p_1^k)$.
- То есть p_1 — это некий корень многочлена $x^k - 2x + 1$ на отрезке $[0, 1]$.
- Кстати, почему корень на $(0, 1)$ существует и единственный?

Доказательство леммы

- Нам осталось только доказать, что $p_1 < 1$, потому что 1, конечно, тоже корень.
- Рассмотрим другое блуждание $(Y_1, Y_2, \ldots)$, заданное как $Y_i = Z_i - k + 2$, причём если $Y_i = 0$, то оно там и останется.
- Так сказать, абсорбирующее блуждание.

Доказательство леммы

- И рассмотрим случайные переменные $W_i = r^{Y_i}$, где r — тот самый корень $x^k - 2x + 1$.
- Тогда $(W_1, W_2, \ldots)$ — это мартингал, т.е. $\boldsymbol{E}[W_{i+1}|W_i] = W_i$. Докажем это.
- Для $Y_i = 0$ это тривиально.
- Для $Y_i > 0$

$$\boldsymbol{E}[r^{Z_{i+1}}|Z_i] = \frac{1}{2}r^{Z_i-1} + \frac{1}{2}r^{Z_i+k-1} = \frac{1}{2}(r^{-1} + r^{k-1})r^{Z_i} = r^{Z_i}.$$

Доказательство леммы

- Поскольку $(W_1, W_2, \ldots)$ — это мартингал, получим, что
$$\boldsymbol{E}[W_t] = W_1 = r \quad \forall t \geq 1.$$
- Обозначим
$$p_{1,t} = \Pr\left[\exists i \leq t : Z_i = Z_1 - 1\right] = \Pr[W_t = 1].$$
- Обозначим $\mathcal{A}_t$ событие $\{Z_t = Z_1 - 1 \text{ и } Z_s > Z_t,\ s < t\}$.

Доказательство леммы

- Тогда $\mathcal{A}_t$ — непересекающиеся измеримые события, $p_{1,t} = \sum_{i=1}^{t} \Pr[\mathcal{A}_i]$, $p_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[\mathcal{A}_i]$.
- Значит, $p_1 = \lim_{t\to\infty} p_{1,t}$.
- Но $p_{1,t} = \Pr[W_t = 1] \leq \boldsymbol{E}[W_t] = r$. Значит, $p_1 \leq r < 1$, а, значит, $p_1 = r$.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage: `http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching`
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.