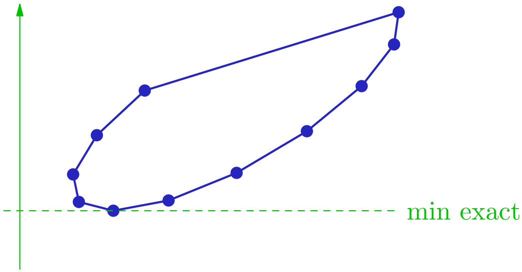
Приближенное решение задач комбинаторной оптимизации: алгоритмы и трудность
Лекция 2: Линейные релаксации

М. Вялый

Вычислительный центр
им. А.А.Дородницына
ФИЦ ИУ РАН

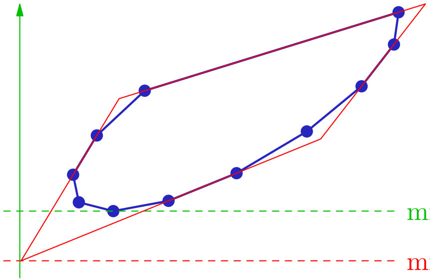
Санкт-Петербург, Computer Science Club, 2016

Основная идея



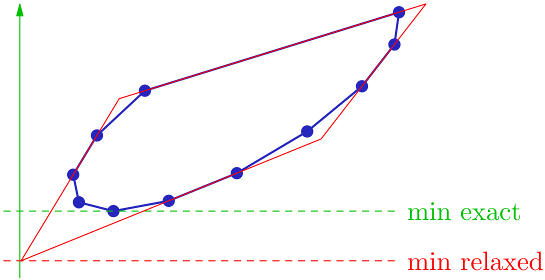
Многогранник задан вершинами. Поиск минимума линейной функции требует, вообще говоря, перебора большой доли вершин.

Основная идея



Оставим только часть линейных ограничений (релаксируем условия). Минимум искать легче, но он может быть меньше минимума в исходной задаче.

Основная идея



Оставим только часть линейных ограничений (релаксируем условия). Минимум искать легче, но он может быть меньше минимума в исходной задаче.

Основной вопрос: насколько меньше?

Пример: задача о вершинном покрытии

Задача ЦЛП

$$\sum_{i\in V} x_i \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\geqslant 1 && \text{для } (ij)\in E,\\ x_i &\in \{0,1\} && \text{для } i\in V. \end{aligned}$$

Переменные x — индикаторная функция покрытия U:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\in U,\\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Минимум в ЦЛП в точности равен размеру минимального вершинного покрытия.

ЛП релаксация

$$\sum_{i\in V} x_i \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\geqslant 1 && \text{для } (ij)\in E,\\ 0 \leqslant x_i &\leqslant 1 && \text{для } i\in V. \end{aligned}$$

Значения x_i могут быть нецелыми.

Минимум в ЛП релаксации не больше размера минимального вершинного покрытия.

Но, как правило, меньше.

Пример: задача о вершинном покрытии

Задача ЦЛП

$$\sum_{i\in V} x_i \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\geqslant 1 && \text{для } (ij) \in E, \\ x_i &\in \{0,1\} && \text{для } i \in V. \end{aligned}$$

Переменные x — индикаторная функция покрытия U:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in U, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Минимум в ЦЛП в точности равен размеру минимального вершинного покрытия.

ЛП релаксация

$$\sum_{i\in V} x_i \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\geqslant 1 && \text{для } (ij) \in E, \\ 0 \leqslant x_i &\leqslant 1 && \text{для } i \in V. \end{aligned}$$

Значения x_i могут быть нецелыми.

Минимум в ЛП релаксации не больше размера минимального вершинного покрытия.

Но, как правило, меньше.

Насколько легче искать минимум в релаксации?

Задача линейного программирования

Дано: целевая функция c (вектор-строка размера n), матрица ограничений A размера $m \times d$, вектор-столбец правых частей размера d.

Найти:

$$cx \to \max,$$
$$Ax \leqslant b \qquad \text{(сравнение покоординатное)}.$$

(Используются обычные матричные операции.)

О представлении данных

Числа в данных задачи задаются как обыкновенные дроби p/q.
Высота L — максимальная длина p, q во входных данных.
Длина записи входа $n = O(dmL)$.

Насколько легче искать минимум в релаксации?

Задача линейного программирования

Дано: целевая функция c (вектор-строка размера n), матрица ограничений A размера $m \times d$, вектор-столбец правых частей размера d.

Найти:

$$cx \to \max,$$
$$Ax \leqslant b \qquad \text{(сравнение покоординатное).}$$

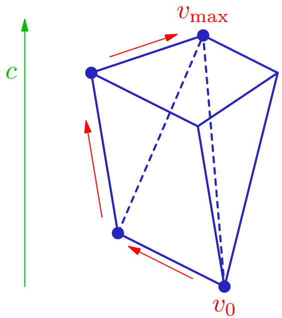
(Используются обычные матричные операции.)

О представлении данных

Числа в данных задачи задаются как обыкновенные дроби p/q.
Высота L — максимальная длина p, q во входных данных.
Длина записи входа $n = O(dmL)$.

Симплекс-метод

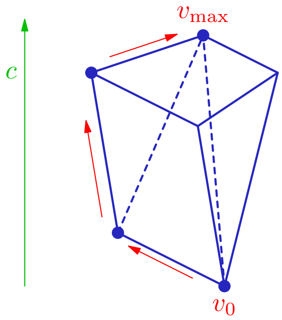
Переходим из вершины в соседнюю, пока не доберёмся до максимума.



Известно, что симплекс-метод хорошо работает на практике.
Однако теоретическая оценка времени работы для всех известных вариантов симплекс-метода плохая, $\exp(d, m)$, даже без учёта высоты данных.

Симплекс-метод

Переходим из вершины в соседнюю, пока не доберёмся до максимума.



Известно, что симплекс-метод хорошо работает на практике.
Однако теоретическая оценка времени работы для всех известных вариантов симплекс-метода плохая, $\exp(d, m)$, даже без учёта высоты данных.

Полиномиальные алгоритмы для ЛП

Используют те или иные методы из численной оптимизации.

1. Алгоритм Хачияна основан на методе эллипсоидов (Юдин, Немировский, Шор).
2. Методы внутренней точки (Кармаркар, Ренегар) основаны фактически на методе Ньютона.

Общая схема

1. Найти экспоненциально точное приближение к оптимуму, используя методы численной оптимизации.
2. Восстановить точное решение, используя цепные дроби.

Нам достаточно очень точного приближения, второй шаг не нужен.

Полиномиальные алгоритмы для ЛП

Используют те или иные методы из численной оптимизации.

1. Алгоритм Хачияна основан на методе эллипсоидов (Юдин, Немировский, Шор).
2. Методы внутренней точки (Кармаркар, Ренегар) основаны фактически на методе Ньютона.

Общая схема

1. Найти экспоненциальное точное приближение к оптимуму, используя методы численной оптимизации.
2. Восстановить точное решение, используя цепные дроби.

Нам достаточно очень точного приближения, второй шаг не нужен.

Полиномиальные алгоритмы для ЛП

Используют те или иные методы из численной оптимизации.

1. Алгоритм Хачияна основан на методе эллипсоидов (Юдин, Немировский, Шор).
2. Методы внутренней точки (Кармаркар, Ренегар) основаны фактически на методе Ньютона.

Общая схема

1. Найти экспоненциальное точное приближение к оптимуму, используя методы численной оптимизации.
2. Восстановить точное решение, используя цепные дроби.

Нам достаточно очень точного приближения, второй шаг не нужен.

Полиномиальные алгоритмы для ЛП

Используют те или иные методы из численной оптимизации.

1. Алгоритм Хачияна основан на методе эллипсоидов (Юдин, Немировский, Шор).
2. Методы внутренней точки (Кармаркар, Ренегар) основаны фактически на методе Ньютона.

Общая схема

1. Найти экспоненциальное точное приближение к оптимуму, используя методы численной оптимизации.
2. Восстановить точное решение, используя цепные дроби.

Нам достаточно очень точного приближения, второй шаг не нужен.

Полиномиальные алгоритмы для ЛП

Используют те или иные методы из численной оптимизации.

1. Алгоритм Хачияна основан на методе эллипсоидов (Юдин, Немировский, Шор).
2. Методы внутренней точки (Кармаркар, Ренегар) основаны фактически на методе Ньютона.

Общая схема

1. Найти экспоненциальное точное приближение к оптимуму, используя методы численной оптимизации.
2. Восстановить точное решение, используя цепные дроби.

Нам достаточно очень точного приближения, второй шаг не нужен.

Полиномиальные алгоритмы для ЛП

Используют те или иные методы из численной оптимизации.

1. Алгоритм Хачияна основан на методе эллипсоидов (Юдин, Немировский, Шор).
2. Методы внутренней точки (Кармаркар, Ренегар) основаны фактически на методе Ньютона.

Общая схема

1. Найти экспоненциальное точное приближение к оптимуму, используя методы численной оптимизации.
2. Восстановить точное решение, используя цепные дроби.

Нам достаточно очень точного приближения, второй шаг не нужен.

Решение систем линейных неравенств

Лемма

Решение задачи ЛП полиномиально сводится к решению систем линейных неравенств $Ax \leqslant b$ (указать решение или убедиться, что система несовместна).

Решение систем линейных неравенств

Лемма

Решение задачи ЛП полиномиально сводится к решению систем линейных неравенств $Ax \leqslant b$ (указать решение или убедиться, что система несовместна).

С аддитивной точностью ε: деление пополам

Проверяется совместность систем неравенств $Ax \leqslant b, \ cx \geqslant M$.
Нужно иметь верхнюю оценку максимума через размер входных данных. Оценка $\max \leqslant \exp(O(Ld \log d))$ получается из неравенства Адамара для определителей порядка d.
Требуется $\mathrm{poly}(n, \log(1/\varepsilon))$ итераций.

Решение систем линейных неравенств

Лемма

Решение задачи ЛП полиномиально сводится к решению систем линейных неравенств $Ax \leqslant b$ (указать решение или убедиться, что система несовместна).

Применение теоремы двойственности ЛП

Нужно найти решение (x^*, y^*) системы линейных неравенств

$$Ax \leqslant b, \quad yA = c, \quad y \geqslant 0, \quad cx = by.$$

Максимум равен cx^*.

Приближённое решение систем линейных неравенств

Совместность системы линейных неравенств с точностью ε означает совместность системы неравенств

$$Ax \leqslant b + \varepsilon\mathbb{1},$$

($\mathbb{1}$ — это вектор, состоящий из одних единиц).

Утверждение 1

Если система неравенств $Ax \leqslant b$ совместна, то у неё есть решение, лежащее в шаре радиуса $R = \exp(O(Ld \log d))$.

Утверждение 2

Если система неравенств $Ax \leqslant b$ совместна, то в множестве решений системы $Ax \leqslant b + \varepsilon\mathbb{1}$ содержится шар радиуса $r \geqslant \varepsilon/(\sqrt{d}2^L)$.

Приближённое решение систем линейных неравенств

Совместность системы линейных неравенств с точностью ε означает совместность системы неравенств

$$Ax \leqslant b + \varepsilon\mathbb{1},$$

($\mathbb{1}$ — это вектор, состоящий из одних единиц).

Утверждение 1

Если система неравенств $Ax \leqslant b$ совместна, то у неё есть решение, лежащее в шаре радиуса $R = \exp(O(Ld\log d))$.

Утверждение 2

Если система неравенств $Ax \leqslant b$ совместна, то в множестве решений системы $Ax \leqslant b + \varepsilon\mathbb{1}$ содержится шар радиуса $r \geqslant \varepsilon/(\sqrt{d}2^L)$.

Приближённое решение систем линейных неравенств

Совместность системы линейных неравенств с точностью ε означает совместность системы неравенств

$$Ax \leqslant b + \varepsilon\mathbb{1},$$

($\mathbb{1}$ — это вектор, состоящий из одних единиц).

Утверждение 1

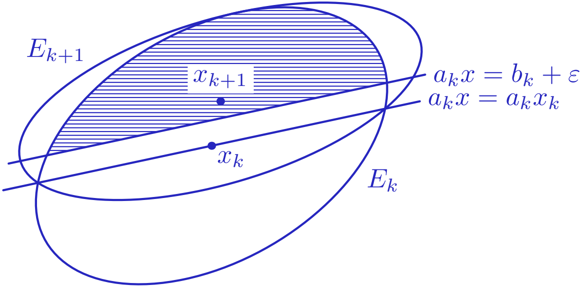
Если система неравенств $Ax \leqslant b$ совместна, то у неё есть решение, лежащее в шаре радиуса $R = \exp(O(Ld\log d))$.

Утверждение 2

Если система неравенств $Ax \leqslant b$ совместна, то в множестве решений системы $Ax \leqslant b + \varepsilon\mathbb{1}$ содержится шар радиуса $r \geqslant \varepsilon/(\sqrt{d}2^L)$.

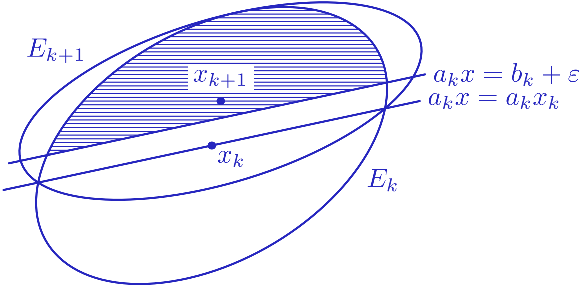
Принципиальная схема метода эллипсоидов

1. Строим последовательность эллипсоидов E_k, начиная с $E_0 = B_R$ — шара радиуса R с центром в начале координат. Центры эллипсоидов обозначим x_k.
2. Если x_k удовлетворяет ε-ослабленной системе, то работа закончена.
3. В противном случае для какого-то k выполняется $a_k x_k > b_k + \varepsilon$. Тогда эллипсоид E_{k+1} — это эллипсоид наименьшего объёма, содержащий полуэллипсоид $E'_k = E_k \cap \{x : a_k x \leqslant a_k x_k\}$.



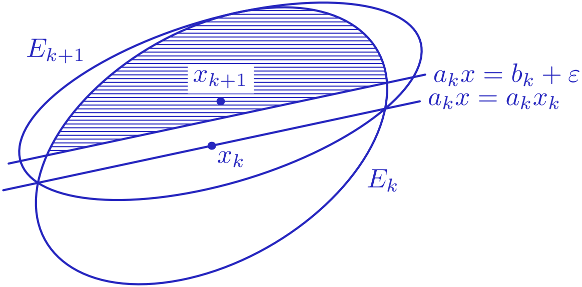
Принципиальная схема метода эллипсоидов

1. Строим последовательность эллипсоидов E_k, начиная с $E_0 = B_R$ — шара радиуса R с центром в начале координат. Центры эллипсоидов обозначим x_k.
2. Если x_k удовлетворяет ε-ослабленной системе, то работа закончена.
3. В противном случае для какого-то k выполняется $a_k x_k > b_k + \varepsilon$. Тогда эллипсоид E_{k+1} — это эллипсоид наименьшего объёма, содержащий полуэллипсоид $E'_k = E_k \cap \{x : a_k x \leqslant a_k x_k\}$.

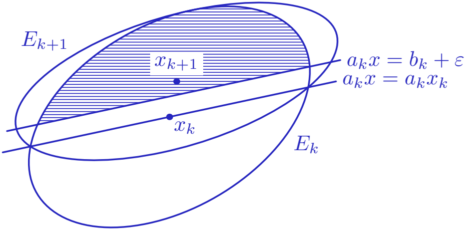


Принципиальная схема метода эллипсоидов

1. Строим последовательность эллипсоидов E_k, начиная с $E_0 = B_R$ — шара радиуса R с центром в начале координат. Центры эллипсоидов обозначим x_k.
2. Если x_k удовлетворяет ε-ослабленной системе, то работа закончена.
3. В противном случае для какого-то k выполняется $a_k x_k > b_k + \varepsilon$. Тогда эллипсоид E_{k+1} — это эллипсоид наименьшего объёма, содержащий полуэллипсоид $E'_k = E_k \cap \{x : a_k x \leqslant a_k x_k\}$.



Свойства последовательности эллипсоидов

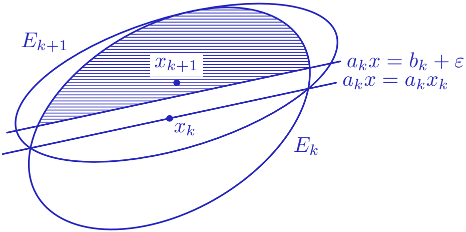


1. Все эллипсоиды E_k содержат пересечение E_0 с множеством решений системы ослабленной системы. (Индукция по k.)
2. Лемма об объёмах:

$$\frac{\mathrm{Vol}(E_{k+1})}{\mathrm{Vol}(E_k)} < e^{-1/(2d+2)}.$$

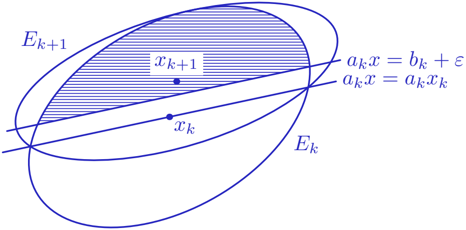
3. Если объём E_T меньше объёма шара радиуса r, то система $Ax \leqslant b$ несовместна. (В противном случае E_T содержал бы шар радиуса r, состоящий из решений ослабленной системы.)

Свойства последовательности эллипсоидов



1. Все эллипсоиды E_k содержат пересечение E_0 с множеством решений системы ослабленной системы. (Индукция по k.)
2. Лемма об объёмах:
$$\frac{\mathrm{Vol}(E_{k+1})}{\mathrm{Vol}(E_k)} < e^{-1/(2d+2)}.$$
3. Если объём E_T меньше объёма шара радиуса r, то система $Ax \leqslant b$ несовместна. (В противном случае E_T содержал бы шар радиуса r, состоящий из решений ослабленной системы.)

Свойства последовательности эллипсоидов



1. Все эллипсоиды E_k содержат пересечение E_0 с множеством решений системы ослабленной системы. (Индукция по k.)
2. Лемма об объёмах:
$$\frac{\mathrm{Vol}(E_{k+1})}{\mathrm{Vol}(E_k)} < e^{-1/(2d+2)}.$$
3. Если объём E_T меньше объёма шара радиуса r, то система $Ax \leqslant b$ несовместна. (В противном случае E_T содержал бы шар радиуса r, состоящий из решений ослабленной системы.)

Оценка количества итераций

- Если после шага T алгоритм остановился, то либо найдено решение ослабленной системы, либо отношение объёмов E_T и $E_0 = B_R$ меньше отношения объёмов B_r и B_R:

$$\frac{\mathrm{Vol}(E_T)}{\mathrm{Vol}(E_0)} < \frac{\mathrm{Vol}(B_r)}{\mathrm{Vol}(B_R)} = \frac{r^d}{R^d}\,.$$

- Из леммы об объёмах получаем, что если

$$e^{-T/(2d+2)} < \frac{r^d}{R^d}\,,$$

после T итераций алгоритм гарантировано остановится.
- Вспоминая оценки $R = \exp(O(Ld\log d))$ и $r \geqslant \varepsilon/(\sqrt{d}2^L)$, получаем, что после

$$T > (2d+2)d\log\frac{R}{r} = O(d^{7/2}L\log(1/\varepsilon)) = \mathrm{poly}(n, \log(1/\varepsilon))$$

итераций алгоритм останавливается.

Оценка количества итераций

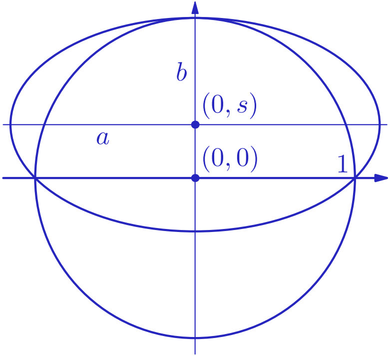
- Если после шага T алгоритм остановился, то либо найдено решение ослабленной системы, либо отношение объёмов E_T и $E_0 = B_R$ меньше отношения объёмов B_r и B_R:
$$\frac{\mathrm{Vol}(E_T)}{\mathrm{Vol}(E_0)} < \frac{\mathrm{Vol}(B_r)}{\mathrm{Vol}(B_R)} = \frac{r^d}{R^d}\,.$$
- Из леммы об объёмах получаем, что если
$$e^{-T/(2d+2)} < \frac{r^d}{R^d}\,,$$
после T итераций алгоритм гарантировано остановится.
- Вспоминая оценки $R = \exp(O(Ld\log d))$ и $r \geqslant \varepsilon/(\sqrt{d}2^L)$, получаем, что после
$$T > (2d+2)d\log\frac{R}{r} = O(d^{7/2}L\log(1/\varepsilon)) = \mathrm{poly}(n, \log(1/\varepsilon))$$
итераций алгоритм останавливается.

Оценка количества итераций

- Если после шага T алгоритм остановился, то либо найдено решение ослабленной системы, либо отношение объёмов E_T и $E_0 = B_R$ меньше отношения объёмов B_r и B_R:
$$\frac{\mathrm{Vol}(E_T)}{\mathrm{Vol}(E_0)} < \frac{\mathrm{Vol}(B_r)}{\mathrm{Vol}(B_R)} = \frac{r^d}{R^d} .$$
- Из леммы об объёмах получаем, что если
$$e^{-T/(2d+2)} < \frac{r^d}{R^d} ,$$
после T итераций алгоритм гарантировано остановится.
- Вспоминая оценки $R = \exp(O(Ld \log d))$ и $r \geqslant \varepsilon/(\sqrt{d}2^L)$, получаем, что после
$$T > (2d+2)d \log \frac{R}{r} = O(d^{7/2} L \log(1/\varepsilon)) = \mathrm{poly}(n, \log(1/\varepsilon))$$
итераций алгоритм останавливается.

Лемма об объёмах. Эллипсоид Лёвнера – Джона

Это эллипсоид наименьшего объёма, описанный вокруг полуэллипсоида. Все эллипсоиды аффинно эквивалентны, поэтому достаточно решить задачу для единичного полушара.



$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{(x_d - s)^2}{b^2} \leqslant 1,$$

$$b = 1 - s,$$

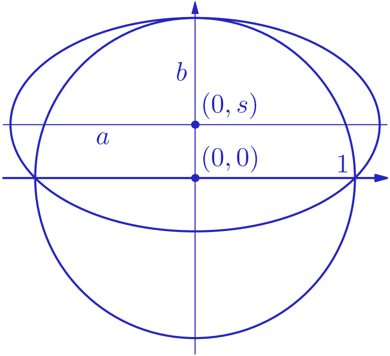
$$a^2 = \frac{(1-s)^2}{1-2s}.$$

Объём пропорционален ba^{d-1}.
При $s = \frac{1}{d+1}$ объём минимален.

Отсюда прямыми вычислениями получается лемма об объёмах.

Лемма об объёмах. Эллипсоид Лёвнера – Джона

Это эллипсоид наименьшего объёма, описанный вокруг полуэллипсоида. Все эллипсоиды аффинно эквивалентны, поэтому достаточно решить задачу для единичного полушара.



$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{(x_d - s)^2}{b^2} \leqslant 1,$$

$$b = 1 - s,$$

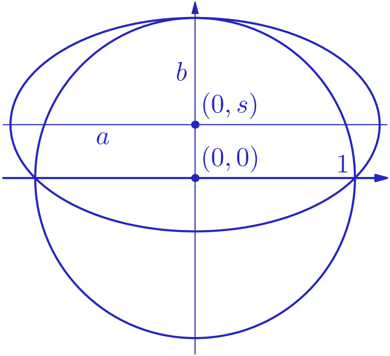
$$a^2 = \frac{(1-s)^2}{1-2s}.$$

Объём пропорционален ba^{d-1}.
При $s = \frac{1}{d+1}$ объём минимален.

Отсюда прямыми вычислениями получается лемма об объёмах.

Лемма об объёмах. Эллипсоид Лёвнера – Джона

Это эллипсоид наименьшего объёма, описанный вокруг полуэллипсоида. Все эллипсоиды аффинно эквивалентны, поэтому достаточно решить задачу для единичного полушара.



$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{(x_d - s)^2}{b^2} \leqslant 1,$$

$$b = 1 - s,$$

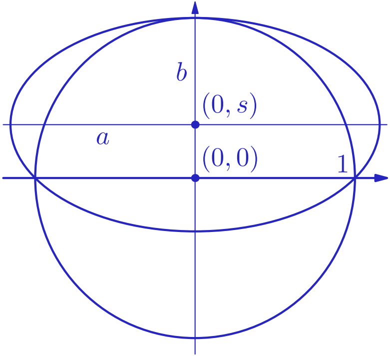
$$a^2 = \frac{(1-s)^2}{1-2s}.$$

Объём пропорционален ba^{d-1}.
При $s = \frac{1}{d+1}$ объём минимален.

Отсюда прямыми вычислениями получается лемма об объёмах.

Лемма об объёмах. Эллипсоид Лёвнера – Джона

Это эллипсоид наименьшего объёма, описанный вокруг полуэллипсоида. Все эллипсоиды аффинно эквивалентны, поэтому достаточно решить задачу для единичного полушара.



$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{(x_d - s)^2}{b^2} \leqslant 1,$$

$$b = 1 - s,$$

$$a^2 = \frac{(1-s)^2}{1-2s}.$$

Объём пропорционален ba^{d-1}.
При $s = \frac{1}{d+1}$ объём минимален.

Отсюда прямыми вычислениями получается лемма об объёмах.

ЛП релаксация вершинного покрытия: упрощение

Задача ЦЛП

$$\min \sum_{i \in V} x_i = c_I,$$
$$x_i + x_j \geqslant 1, \quad (ij) \in E,$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in V.$$

ЛП релаксация

$$\min \sum_{i \in V} x_i = c_{\mathbb{R}},$$
$$x_i + x_j \geqslant 1, \quad (ij) \in E,$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad i \in V.$$

Наблюдение

Неравенства $x_i \leqslant 1$ в релаксации можно опустить. Нетрудно видеть, что они не влияют на значение минимума: остальные условия не нарушаются, если заменить все $x_i > 1$ на $x_i = 1$.

ЛП релаксация вершинного покрытия: упрощение

Задача ЦЛП

$$\min \sum_{i\in V} x_i = c_I,$$
$$x_i + x_j \geqslant 1, \quad (ij) \in E,$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in V.$$

ЛП релаксация

$$\min \sum_{i\in V} x_i = c_{\mathbb{R}},$$
$$x_i + x_j \geqslant 1, \quad (ij) \in E,$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad i \in V.$$

Наблюдение

Неравенства $x_i \leqslant 1$ в релаксации можно опустить. Нетрудно видеть, что они не влияют на значение минимума: остальные условия не нарушаются, если заменить все $x_i > 1$ на $x_i = 1$.

ЛП релаксация вершинного покрытия: упрощение

Задача ЦЛП

$$\min \sum_{i \in V} x_i = c_I,$$
$$x_i + x_j \geqslant 1, \quad (ij) \in E,$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V.$$

ЛП релаксация

$$\min \sum_{i \in V} x_i = c_{\mathbb{R}},$$
$$x_i + x_j \geqslant 1, \quad (ij) \in E,$$
$$0 \leqslant x_i, \quad i \in V.$$

Наблюдение

Неравенства $x_i \leqslant 1$ в релаксации можно опустить. Нетрудно видеть, что они не влияют на значение минимума: остальные условия не нарушаются, если заменить все $x_i > 1$ на $x_i = 1$.

ЛП релаксация вершинного покрытия: оценка точности

Теорема

$$c_{\mathbb{R}} \leqslant c_I \leqslant 2c_{\mathbb{R}}$$

Существует полиномиальный алгоритм построения вершинного покрытия размером $\leqslant 2c_{\mathbb{R}}$ из оптимального решения ЛП релаксации.

Доказательство

Пусть x^* — оптимальное решение ЛП релаксации. Построим множество S по правилу $S = \{i : x_i^* \geqslant 1/2\}$.

S — вершинное покрытие: для $(ij) \in E$ выполняется $x_i^* + x_j^* \geqslant 1$, то есть, $x_i^* \geqslant 1/2$ или $x_j^* \geqslant 1/2$. Поэтому S покрывает ребро (ij).

Сравним размер S и $c_{\mathbb{R}}$, c_I:

$$c_I \leqslant |S| = \sum_{i \in S} 1 \leqslant 2 \sum_{i \in S} x_i^* \leqslant 2c_{\mathbb{R}}.$$

ЛП релаксация вершинного покрытия: оценка точности

Теорема

$$c_{\mathbb{R}} \leqslant c_I \leqslant 2c_{\mathbb{R}}$$

Существует полиномиальный алгоритм построения вершинного покрытия размером $\leqslant 2c_{\mathbb{R}}$ из оптимального решения ЛП релаксации.

Доказательство

Пусть x^* — оптимальное решение ЛП релаксации. Построим множество S по правилу $S = \{i : x_i^* \geqslant 1/2\}$.

S — вершинное покрытие: для $(ij) \in E$ выполняется $x_i^* + x_j^* \geqslant 1$, то есть, $x_i^* \geqslant 1/2$ или $x_j^* \geqslant 1/2$. Поэтому S покрывает ребро (ij).

Сравним размер S и $c_{\mathbb{R}}$, c_I:

$$c_I \leqslant |S| = \sum_{i \in S} 1 \leqslant 2 \sum_{i \in S} x_i^* \leqslant 2c_{\mathbb{R}}.$$

ЛП релаксация вершинного покрытия: оценка точности

Теорема

$$c_{\mathbb{R}} \leqslant c_I \leqslant 2c_{\mathbb{R}}$$

Существует полиномиальный алгоритм построения вершинного покрытия размером $\leqslant 2c_{\mathbb{R}}$ из оптимального решения ЛП релаксации.

Доказательство

Пусть x^* — оптимальное решение ЛП релаксации. Построим множество S по правилу $S = \{i : x_i^* \geqslant 1/2\}$.

S — вершинное покрытие: для $(ij) \in E$ выполняется $x_i^* + x_j^* \geqslant 1$, то есть, $x_i^* \geqslant 1/2$ или $x_j^* \geqslant 1/2$. Поэтому S покрывает ребро (ij).

Сравним размер S и $c_{\mathbb{R}}$, c_I:

$$c_I \leqslant |S| = \sum_{i \in S} 1 \leqslant 2 \sum_{i \in S} x_i^* \leqslant 2c_{\mathbb{R}}.$$

ЛП релаксация вершинного покрытия: оценка точности

Теорема

$$c_{\mathbb{R}} \leqslant c_I \leqslant 2c_{\mathbb{R}}$$

Существует полиномиальный алгоритм построения вершинного покрытия размером $\leqslant 2c_{\mathbb{R}}$ из оптимального решения ЛП релаксации.

Доказательство

Пусть x^* — оптимальное решение ЛП релаксации. Построим множество S по правилу $S = \{i : x_i^* \geqslant 1/2\}$.
S — вершинное покрытие: для $(ij) \in E$ выполняется $x_i^* + x_j^* \geqslant 1$, то есть, $x_i^* \geqslant 1/2$ или $x_j^* \geqslant 1/2$. Поэтому S покрывает ребро (ij).
Сравним размер S и $c_{\mathbb{R}}$, c_I:

$$c_I \leqslant |S| = \sum_{i \in S} 1 \leqslant 2 \sum_{i \in S} x_i^* \leqslant 2c_{\mathbb{R}}.$$

О достижимости оценок ЛП релаксации

Легко проверить, что обе оценки достигаются.

О достижимости оценок ЛП релаксации

Легко проверить, что обе оценки достигаются.

Достижимость нижней оценки

Граф — совершенное паросочетание на $2n$ вершинах. Оптимальное решение для релаксации $x_i = 1/2$. То есть $c_{\mathbb{R}} = n = c_I$.

О достижимости оценок ЛП релаксации

Легко проверить, что обе оценки достигаются.

Достижимость верхней оценки

Полный граф на $n > 2$ вершинах, $c_l = n - 1$ (любые две вершины связаны ребром).

О достижимости оценок ЛП релаксации

Легко проверить, что обе оценки достигаются.

Достижимость верхней оценки

$c_I = n - 1$

Любые две вершины связаны ребром. Значит, в допустимом решении ЛП релаксации есть не более одной переменной $< 1/2$. Пусть $x_1 < 1/2$, тогда $x_i > 1 - x_1$.

О достижимости оценок ЛП релаксации

Легко проверить, что обе оценки достигаются.

Достижимость верхней оценки

$c_I = n - 1$, $x_1 < 1/2$, $x_i > 1 - x_1$.

Суммируя по всем переменным, получаем

$$\sum_{i \in V \setminus \{1\}} x_i \geqslant (n-1)(1 - x_1),$$

то есть значение целевой функции не меньше

$$x_1 + (n-1)(1-x_1) = (n-1) - (n-2)x_1 > \frac{n}{2}\,.$$

Поэтому оптимальное решение для релаксации $x_i = 1/2$, $c_{\mathbb{R}} = n/2$.

О достижимости оценок ЛП релаксации

Легко проверить, что обе оценки достигаются.

Достижимость верхней оценки

$c_I = n - 1$, $c_{\mathbb{R}} = n/2$. Для любого ε существует граф, на котором

$$\frac{c_I}{c_{\mathbb{R}}} \geqslant 2 - \varepsilon.$$

Поэтому верхняя оценка также точная.

Общая задача о минимальном покрытии

Задача MIN-Cover

Дано: Семейство $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_m)$ подмножеств базового n-элементного множества $[n]$.

Найти: минимальное по количеству подмножеств покрытие множества $[n]$ подмножествами из семейства $\mathcal{F}$.

Пример

$$\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\ \{2,3,4\},\ \{3,4,5\},\ \{4,5,6\},\ \{5,6,7\},\ \{6,7,8\}\}.$$

Минимальное покрытие множества $[8]$ содержит 3 множества. Одно из минимальных покрытий

$$\{1,2,3\},\ \{4,5,6\},\ \{6,7,8\}.$$

Общая задача о минимальном покрытии

Задача MIN-Cover

Дано: Семейство $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_m)$ подмножеств базового n-элементного множества $[n]$.

Найти: минимальное по количеству подмножеств покрытие множества $[n]$ подмножествами из семейства $\mathcal{F}$.

Пример

$$\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\ \{2,3,4\},\ \{3,4,5\},\ \{4,5,6\},\ \{5,6,7\},\ \{6,7,8\}\}.$$

Минимальное покрытие множества $[8]$ содержит 3 множества. Одно из минимальных покрытий

$$\{1,2,3\},\ \{4,5,6\},\ \{6,7,8\}.$$

ЛП релаксация MIN-Cover

Задача ЦЛП для MIN-Cover

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} x_S \to \min,$$
$$\sum_{S\ni i} x_S \geqslant 1 \text{ для } i\in[n],$$
$$x_S \in \{0,1\} \text{ для } S\in\mathcal{F}.$$

$x_S = 1$ тогда и только тогда, когда множество S входит в покрытие.
Минимум обозначим c_I.

ЛП релаксация

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} x_S \to \min,$$
$$\sum_{S\ni i} x_S \geqslant 1 \text{ для } i\in[n],$$
$$x_S \geqslant 0 \text{ для } S\in\mathcal{F}.$$

Неравенства $x_S \leqslant 1$ не изменяют минимума в ЛП релаксации (аналогично задаче о вершинном покрытии).
Минимум обозначим $c_{\mathbb{R}}$.

ЛП релаксация MIN-Cover

Задача ЦЛП для MIN-Cover

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} x_S \to \min,$$

$$\sum_{S \ni i} x_S \geqslant 1 \text{ для } i \in [n],$$

$$x_S \in \{0, 1\} \text{ для } S \in \mathcal{F}.$$

$x_S = 1$ тогда и только тогда, когда множество S входит в покрытие.
Минимум обозначим c_I.

ЛП релаксация

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} x_S \to \min,$$

$$\sum_{S \ni i} x_S \geqslant 1 \text{ для } i \in [n],$$

$$x_S \geqslant 0 \text{ для } S \in \mathcal{F}.$$

Неравенства $x_S \leqslant 1$ не изменяют минимума в ЛП релаксации (аналогично задаче о вершинном покрытии).
Минимум обозначим $c_{\mathbb{R}}$.

Оценка точности

Теорема

При $n \to \infty$ выполняются неравенства

$$c_{\mathbb{R}} \leqslant c_I \leqslant \log n \cdot (1 + o(1)) c_{\mathbb{R}}.$$

Существует полиномиальный вероятностный алгоритм поиска покрытия размером $\leqslant \log n \cdot (1 + o(1)) c_{\mathbb{R}}$.

Алгоритм «округления» с параметром t

По решению $x^* \leqslant \mathbb{1}$ ЛП релаксации строим не слишком большое покрытие.

Порождаем случайное подмножество $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$, начиная с $\mathcal{X} = \varnothing$.

Повторяем t раз процедуру расширения списка по правилу «каждое множество S добавляется в текущий список $\mathcal{X}$ с вероятностью x_S^*».

Оценка точности

Теорема

При $n \to \infty$ выполняются неравенства

$$c_{\mathbb{R}} \leqslant c_I \leqslant \log n \cdot (1 + o(1)) c_{\mathbb{R}}.$$

Существует полиномиальный вероятностный алгоритм поиска покрытия размером $\leqslant \log n \cdot (1 + o(1)) c_{\mathbb{R}}$.

Алгоритм «округления» с параметром t

По решению $x^* \leqslant \mathbb{1}$ ЛП релаксации строим не слишком большое покрытие.

Порождаем случайное подмножество $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$, начиная с $\mathcal{X} = \varnothing$.

Повторяем t раз процедуру расширения списка по правилу «каждое множество S добавляется в текущий список $\mathcal{X}$ с вероятностью x_S^*».

Свойства случайного списка

1. Сколько множеств добавляется на одном шаге расширения?

$$\mathbf{E}[\#(\text{новых множеств})] = \sum_{S\in\mathcal{F}} \mathbf{Pr}[S \text{ добавлено}] = \sum_{S\in\mathcal{F}} x_S^* = c_{\mathbb{R}}.$$

2. В силу линейности матожидания, матожидание N — количества множеств в списке после t шагов равно $tc_{\mathbb{R}} \leqslant tc_I$.
3. Неравенство Маркова

$$\mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_I] \leqslant \mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_{\mathbb{R}}] \leqslant \frac{1}{1+\alpha}.$$

Свойства случайного списка

1. Сколько множеств добавляется на одном шаге расширения?

$$\mathbf{E}[\#(\text{новых множеств})] = \sum_{S\in\mathcal{F}} \mathbf{Pr}[S \text{ добавлено}] = \sum_{S\in\mathcal{F}} x_S^* = c_{\mathbb{R}}.$$

2. В силу линейности матожидания, матожидание N — количества множеств в списке после t шагов равно $tc_{\mathbb{R}} \leqslant tc_I$.

3. Неравенство Маркова

$$\mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_I] \leqslant \mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_{\mathbb{R}}] \leqslant \frac{1}{1+\alpha}.$$

Свойства случайного списка

1. Сколько множеств добавляется на одном шаге расширения?

$$\mathbf{E}[\#(\text{новых множеств})] = \sum_{S \in \mathcal{F}} \mathbf{Pr}[S \text{ добавлено}] = \sum_{S \in \mathcal{F}} x_S^* = c_{\mathbb{R}}.$$

2. В силу линейности матожидания, матожидание N — количества множеств в списке после t шагов равно $tc_{\mathbb{R}} \leqslant tc_I$.
3. Неравенство Маркова

$$\mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_I] \leqslant \mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_{\mathbb{R}}] \leqslant \frac{1}{1+\alpha}.$$

Свойства случайного списка (продолжение)

3. Неравенство Маркова

$$\mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_I] \leqslant \mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_{\mathbb{R}}] \leqslant \frac{1}{1+\alpha}\,.$$

4. Для $i \in [n]$ вероятность остаться непокрытым на данном шаге легко оценивается:

$$\mathbf{Pr}[i \text{ не покрыт на одном шаге}] =$$
$$= \prod_{S \ni i}(1 - x_S^*) \leqslant \prod_{S \ni i} e^{-x_S^*} = \exp\left(-\sum_{S \ni i} x_S^*\right) \leqslant e^{-1}.$$

5. По оценке объединения

$$\mathbf{Pr}[\text{итоговый список } \mathcal{X} \text{ не покрытие}] \leqslant ne^{-t}.$$

Свойства случайного списка (продолжение)

3. Неравенство Маркова

$$\mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_I] \leqslant \mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_{\mathbb{R}}] \leqslant \frac{1}{1+\alpha}\ .$$

4. Для $i \in [n]$ вероятность остаться непокрытым на данном шаге легко оценивается:

$$\mathbf{Pr}[i \text{ не покрыт на одном шаге}] =$$
$$= \prod_{S \ni i}(1 - x_S^*) \leqslant \prod_{S \ni i} e^{-x_S^*} = \exp\left(-\sum_{S \ni i} x_S^*\right) \leqslant e^{-1}.$$

5. По оценке объединения

$$\mathbf{Pr}[\text{итоговый список } \mathcal{X} \text{ не покрытие}] \leqslant ne^{-t}.$$

Свойства случайного списка (продолжение)

3. Неравенство Маркова

$$\mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_I] \leqslant \mathbf{Pr}[N \geqslant (1+\alpha)tc_{\mathbb{R}}] \leqslant \frac{1}{1+\alpha}\,.$$

4. Для $i \in [n]$ вероятность остаться непокрытым на данном шаге легко оценивается:

$$\mathbf{Pr}[i \text{ не покрыт на одном шаге}] =$$
$$= \prod_{S \ni i}(1 - x_S^*) \leqslant \prod_{S \ni i} e^{-x_S^*} = \exp\left(-\sum_{S \ni i} x_S^*\right) \leqslant e^{-1}.$$

5. По оценке объединения

$$\mathbf{Pr}[\text{итоговый список } \mathcal{X} \text{ не покрытие}] \leqslant ne^{-t}.$$

Окончание доказательства теоремы

Доказали утверждение.

Утверждение

С вероятностью

$$\geqslant 1 - \frac{1}{1+\alpha} - ne^{-t}$$

итоговый список является покрытием, которое отличается от оптимального не более чем в $(1+\alpha)t$ раз.

Выбор параметров

При $t = \ln n + 2\ln\ln n$, $\alpha = 1/\ln n$ алгоритм с вероятностью $\Omega(\ln^{-1} n)$ находит покрытие, отличающееся от оптимального не более чем в

$$\ln n(1 + 1/\ln n)((1 + 2\ln\ln n/\ln n) = \ln n \cdot (1 + o(1))$$

раз.

Окончание доказательства теоремы

Доказали утверждение.

Утверждение

С вероятностью

$$\geqslant 1 - \frac{1}{1+\alpha} - ne^{-t}$$

итоговый список является покрытием, которое отличается от оптимального не более чем в $(1+\alpha)t$ раз.

Выбор параметров

При $t = \ln n + 2 \ln \ln n$, $\alpha = 1/\ln n$ алгоритм с вероятностью $\Omega(\ln^{-1} n)$ находит покрытие, отличающееся от оптимального не более чем в

$$\ln n(1 + 1/\ln n)((1 + 2 \ln \ln n/\ln n) = \ln n \cdot (1 + o(1))$$

раз.

Уменьшение вероятности ошибки

Если нужен алгоритм, вероятность ошибки которого меньше ε, нужно повторить данный алгоритм достаточно большое (но полиномиальное) число раз и выбрать самое лучшее из полученных покрытий.

Действительно, после k повторений алгоритма вероятность ошибки (все полученные покрытия отличаются от оптимума на множитель больше $\log^{-1} n(1 + o(1))$) не превосходит

$$\left(1 - \frac{C}{\log n}\right)^k \leqslant e^{-C'k/\log n}.$$

Это меньше ε при $k = O(\log n \cdot \log(1/\varepsilon))$.

Уменьшение вероятности ошибки

Если нужен алгоритм, вероятность ошибки которого меньше ε, нужно повторить данный алгоритм достаточно большое (но полиномиальное) число раз и выбрать самое лучшее из полученных покрытий. Действительно, после k повторений алгоритма вероятность ошибки (все полученные покрытия отличаются от оптимума на множитель больше $\log^{-1} n(1+o(1))$) не превосходит

$$\left(1-\frac{C}{\log n}\right)^k \leqslant e^{-C'k/\log n}.$$

Это меньше ε при $k = O(\log n \cdot \log(1/\varepsilon))$.

Достижимость оценок

Нижняя оценка очевидно достигается. Верхняя достигается с точностью до множителя $1/2$.

Плохой случай для ЛП релаксации

В качестве базового множества возьмём ненулевые элементы векторного пространства $\mathbb{F}_2^d$ (так что $n = 2^d - 1$). А в качестве семейства множеств $\mathcal{F}$ возьмём аффинные гиперплоскости

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{F}_2^d : \alpha \cdot x = 1\}, \quad \alpha \in \mathbb{F}_2^d \setminus \{0\}.$$

Задача

Докажите, что (а) $c_\mathbb{R} \leqslant 2$; (б) $c_I \geqslant d = \log(n+1)$.

Вопрос

Можно ли улучшить оценку достижимости? (До множителя $1 + o(1)$.)

Достижимость оценок

Нижняя оценка очевидно достигается. Верхняя достигается с точностью до множителя $1/2$.

Плохой случай для ЛП релаксации

В качестве базового множества возьмём ненулевые элементы векторного пространства $\mathbb{F}_2^d$ (так что $n = 2^d - 1$). А в качестве семейства множеств $\mathcal{F}$ возьмём аффинные гиперплоскости

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{F}_2^d : \alpha \cdot x = 1\}, \quad \alpha \in \mathbb{F}_2^d \setminus \{0\}.$$

Задача

Докажите, что (а) $c_\mathbb{R} \leqslant 2$; (б) $c_I \geqslant d = \log(n+1)$.

Вопрос

Можно ли улучшить оценку достижимости? (До множителя $1 + o(1)$.)

Достижимость оценок

Нижняя оценка очевидно достигается. Верхняя достигается с точностью до множителя $1/2$.

Плохой случай для ЛП релаксации

В качестве базового множества возьмём ненулевые элементы векторного пространства $\mathbb{F}_2^d$ (так что $n = 2^d - 1$). А в качестве семейства множеств $\mathcal{F}$ возьмём аффинные гиперплоскости

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{F}_2^d : \alpha \cdot x = 1\}, \quad \alpha \in \mathbb{F}_2^d \setminus \{0\}.$$

Задача

Докажите, что (а) $c_{\mathbb{R}} \leqslant 2$; (б) $c_I \geqslant d = \log(n+1)$.

Вопрос

Можно ли улучшить оценку достижимости? (До множителя $1 + o(1)$.)

Bad news for LP relaxations

Есть простой «жадный» алгоритм построения покрытия: на каждом шаге добавляем то множество, которое покрывает наибольшую долю ещё непокрытых элементов.

Задача

Докажите, что жадный алгоритм имеет погрешность $\ln n \cdot (1 + o(1))$.

Bad news for LP relaxations

Есть простой «жадный» алгоритм построения покрытия: на каждом шаге добавляем то множество, которое покрывает наибольшую долю ещё непокрытых элементов.

Задача

Докажите, что жадный алгоритм имеет погрешность $\ln n \cdot (1 + o(1))$.

Есть ли «интересные» примеры ЛП релаксаций?

Ответ: да!

Пример — задача об относительном разрезе (the sparsest cut) будет разобран в следующий раз.

Есть ли «интересные» примеры ЛП релаксаций?

Ответ: да!

Пример — задача об относительном разрезе (the sparsest cut) будет разобран в следующий раз.