Задание 6 (на 17 октября)

Обозначения. Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ. Пусть $d(\phi)$ обозначает минимальную возможную глубину дерева решений для формулы ϕ. Пусть $VarSpace(\phi)$ обозначает минимум по всем реализациям резолюционных доказательств формулы ϕ максимального числа различных переменных, которые одновременно встречаются в памяти.

PC27. Покажите, что $VarSpace(\phi) \leq d(\phi)$.

PC28. Приведите пример семейства невыполнимых формул ϕ_n, для которого $d(\phi_n) = \Omega(\log n)$, а $VarSpace(\phi_n) = O(1)$.

Определение. Игра с фишками на графе. Пусть G — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число $peb(G)$ — это наименьшее такое число k, что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что k в любой момент времени использовано не более k фишек).

PC29. Пусть G — это ориентированный граф квадратика $n \times n$, в котором вершины — это узлы сетки, а ребра направлены вправо и вверх. Покажите, что $peb(G) = \Omega(n)$.

PC30. (**Исправлено!**) Пусть $G(V, E)$ — ориентированный граф без циклов. Для кажой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу Peb_G: для каждой вершины v в которую ведут ребра в вершин $u_1, u_2, \dots, u_k$, где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $v \vee \neg u_1\ lor \neg u_2 \vee \dots \neg u_k$ и для всех вершин w исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт $\neg w$. Покажите, что $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$.

PC18. (**Исправлено!**) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

PC19. б) Покажите, что если формула ϕ в k-КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S, то за время $n^{O(\log S + k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ.

PC21. Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $Ts_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.

PC23. Рассмотрим следующий способ модификации формулы в КНФ. Для каждого дизъюнкта $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$, в который входит более 3-х литералов, мы вводим новые переменные $e_0, e_1, \dots, e_n$ и заменяем этот дизъюнкт на такие: $e_0, (\neg e_0 \vee \ell_1 \vee e_1), (\neg e_1 \vee \ell_2 \vee e_2), \dots, (\neg e_{n-1} \vee \ell_n \vee e_n), \neg e_n$. Нетрудно заметить, что исходный дизъюнкт выводится из тех, на которые его заменили. Покажите, что если такую операцию применить к PHP_n^{n+1}, то получится формула, ширина которой $\Omega(n)$.

PC24. Пусть S — множество дизъюнктов, возможно пустое. Обозначем через $neg(S)$ множество дизъюнктов, которое определяется рекурсивно: $neg(\emptyset) = \{\Box\}$, $neg(S \cup \{C\}) = \{D \vee \neg a \mid D \in neg(S), a \in C\}$, при этом тривиальные дизъюнкты удаляются, и удаляются дизъюнкты, которые являются надмножеством (ослаблением) других дизъюнктов.

а) Проверьте, что ширина любого дизъюнкта из $neg(S)$ не превосходит $|S|$.

б) Проверьте, что для непустого S множество $neg(S)$ в точности состоит из минимальных по включению нетривиальных дизъюнктов, что из их отрицания семантически следует конъюнкция дизъюнктов из S.

в) Покажите, что набор значений переменных выполняет все дизъюнкты множества S тогда и только тогда, когда он опровергает хотя бы один дизъюнкт из $neg(S)$.

г) Покажите, что если из конъюнкции множества дизъюнктов S семантически следует конъюнкция множества дизъюнктов S', то для каждого дизъюнкта $C \in neg(S)$ существует такой дизъюнкт $C' \in neg(S')$, что C есть ослабление C'.

д) (**Исправлено!**) Пусть $S_0, S_1, \dots, S_t$ — это реализация резолюционного доказательства для невыполнимой формулы ϕ в k-КНФ, использующая память (clause space) s. Покажите, что $neg(S_t), neg(S_{t-1}), \dots, neg(S_0)$ можно дополнить до резолюционного доказательства формулы ϕ ширины не более $s + k - 3$.