Алгоритм Альфреда Тарского

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat

Альфред Тарский (Afred Tarski, 1901–1983)

Книга Алфреда Тарского

Разрешающая процедура для элементарной алгебры и геометрии

Разрешающая процедура для элементарных алгебры и геометрии

PROJECT RAND

A DECISION METHOD FOR ELEMENTARY ALGEBRA AND GEOMETRY

ALFRED TARSKI

Prepared for Publication by J. C. C. McKinsey

This report, although published by the RAND Corporation, was written while the Project was a part of Douglas Aircraft Co., Inc.

August 1, 1948

(Revised May, 1951)

R-109

The RAND Corporation
1700 MAIN ST. • SANTA MONICA • CALIFORNIA

Second Edition, 1957

Геометрия

- Задачи на вычисление
- Задачи на построение
- Задачи на доказательство

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой ℓ" , $\texttt{OnLine}(A, \ell)$
- "Точка A лежит на окружности O" , $\texttt{OnCircle}(A, O)$
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D" , $\texttt{EqDistance}(A, B, C, D)$
- ...

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- "Для любых двух точек A и B существует прямая ℓ, на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists \ell \{\mathtt{OnLine}(A, \ell) \wedge \mathtt{OnLine}(B, \ell)\}$$

- "Если точки точки A и B различны и обе лежат на прямых ℓ и m, то эти прямые совпадают":

$$\forall A \forall B \forall \ell \forall m \{A \neq B \wedge \mathtt{OnLine}(A, \ell) \wedge \mathtt{OnLine}(B, \ell) \wedge \\ \wedge \mathtt{OnLine}(A, m) \wedge \mathtt{OnLine}(B, m) \Rightarrow \ell = m\}$$

- ...

Теорема о пересечении медиан

Три меридианы треугольниа пересекаются в одной точке

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были три попарно различные точки A_1, A_2 и A_3, существуют точки B_1, B_2, B_3 и C и прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, m_1, m_2 и m_3 такие что

$$\begin{gathered}
\texttt{OnLine}(A_2, \ell_1) \wedge \texttt{OnLine}(A_3, \ell_1) \wedge \texttt{OnLine}(B_1, \ell_1) \wedge \\
\wedge \texttt{OnLine}(A_1, \ell_2) \wedge \texttt{OnLine}(A_3, \ell_2) \wedge \texttt{OnLine}(B_2, \ell_2) \wedge \\
\wedge \texttt{OnLine}(A_1, \ell_3) \wedge \texttt{OnLine}(A_2, \ell_3) \wedge \texttt{OnLine}(B_3, \ell_3) \wedge \\
\wedge \texttt{OnLine}(A_1, m_1) \wedge \texttt{OnLine}(B_1, m_1) \wedge \texttt{OnLine}(C, m_1) \wedge \\
\wedge \texttt{OnLine}(A_2, m_2) \wedge \texttt{OnLine}(B_2, m_2) \wedge \texttt{OnLine}(C, m_2) \wedge \\
\wedge \texttt{OnLine}(A_3, m_3) \wedge \texttt{OnLine}(B_3, m_3) \wedge \texttt{OnLine}(C, m_3) \wedge \\
\wedge \texttt{EqDistance}(A_1, B_2, B_2, A_3) \wedge \\
\wedge \texttt{EqDistance}(A_2, B_1, B_1, A_3) \wedge \\
\wedge \texttt{EqDistance}(A_1, B_3, B_3, A_2)
\end{gathered}$$

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой", `OnLine`(A, B, C)
- "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C", `OnCircle`(A, B, C)
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D", `EqDistance`(A, B, C, D)
- ...

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были точки A_1, A_2 и A_3, существуют точки B_1, B_2, B_3 и C такие, что

$$
\begin{gathered}
A_1 \neq A_2 \;\wedge\; A_1 \neq A_3 \;\wedge\; A_2 \neq A_3 \Rightarrow \\
\Rightarrow \texttt{OnLine}(A_1, A_2, B_3) \;\wedge\; \texttt{OnLine}(A_2, A_3, B_1) \;\wedge\; \texttt{OnLine}(A_1, A_3, B_2) \wedge \\
\wedge\; \texttt{OnLine}(A_1, B_1, C) \;\wedge\; \texttt{OnLine}(A_2, B_2, C) \;\wedge\; \texttt{OnLine}(A_3, B_3, C) \wedge \\
\wedge\; \texttt{EqDistance}(A_1, B_2, B_2, A_3) \wedge \\
\wedge\; \texttt{EqDistance}(A_2, B_1, B_1, A_3) \wedge \\
\wedge\; \texttt{EqDistance}(A_1, B_3, B_3, A_2)
\end{gathered}
$$

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой", $\mathtt{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ лежат на одной окружности с центром в точке $\langle c_x, c_y \rangle$", $\mathtt{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- "Расстояние между точками $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ равно расстоянию между точками $\langle c_x, c_y \rangle$ и $\langle d_x, d_y \rangle$", $\mathtt{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y)$
- ...

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были числа $a_{1,x}$, $a_{1,y}$, $a_{2,x}$, $a_{2,y}$, $a_{3,x}$, $a_{3,y}$, *существуют числа* $b_{1,x}$, $b_{1,y}$, $b_{2,x}$, $b_{2,y}$, $b_{3,x}$, $b_{3,y}$, c_x *и* c_y *такие, что*

$$
\begin{gathered}
(a_{1,x} \neq a_{2,x} \lor a_{1,y} \neq a_{2,y}) \land (a_{1,x} \neq a_{3,x} \lor a_{1,y} \neq a_{3,y}) \land \\
\land (a_{2,x} \neq a_{3,x} \lor a_{2,y} \neq a_{3,y}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \texttt{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, a_{2,x}, a_{2,y}, b_{3,x}, b_{3,y}) \land \\
\land \texttt{OnLine}(a_{2,x}, a_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}, b_{1,x}, b_{1,y}) \land \\
\land \texttt{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, a_{3,x}, a_{3,y}, b_{2,x}, b_{2,y}) \land \\
\land \texttt{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, c_x, c_y) \land \\
\land \texttt{OnLine}(a_{2,x}, a_{2,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, c_x, c_y) \land \\
\land \texttt{OnLine}(a_{3,x}, a_{3,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, c_x, c_y) \land \\
\land \texttt{EqDistance}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}) \land \\
\land \texttt{EqDistance}(a_{2,x}, a_{2,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, a_{3,x}, a_{3,y}) \land \\
\land \texttt{EqDistance}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, a_{2,x}, a_{2,y})
\end{gathered}
$$

Немного алгебры

$$\texttt{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) \iff$$
$$\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2$$

$$\texttt{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \iff$$
$$\begin{aligned} \iff \quad & \texttt{EqDistance}(a_x, a_y, c_x, c_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \\ \iff \quad & (a_x - c_x)^2 + (a_y - c_y)^2 = (b_x - c_x)^2 + (b_y - c_y)^2 \end{aligned}$$

$$\texttt{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \iff a_x b_y + a_y c_x + b_x c_y - a_x c_y - a_y b_x - b_y c_x = 0$$

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были числа $a_{1,x}$, $a_{1,y}$, $a_{2,x}$, $a_{2,y}$, $a_{3,x}$, $a_{3,y}$, существуют числа $b_{1,x}$, $b_{1,y}$, $b_{2,x}$, $b_{2,y}$, $b_{3,x}$, $b_{3,y}$, c_x и c_y такие, что

$$
\begin{gathered}
(a_{1,x} \neq a_{2,x} \lor a_{1,y} \neq a_{2,y}) \land (a_{1,x} \neq a_{3,x} \lor a_{1,y} \neq a_{3,y}) \land \\
\land (a_{2,x} \neq a_{3,x} \lor a_{2,y} \neq a_{3,y}) \Rightarrow \\
\Rightarrow a_{1,x}a_{2,y} + a_{1,y}b_{3,x} + a_{2,x}b_{3,y} - a_{1,x}b_{3,y} - a_{1,y}a_{2,x} - a_{2,y}b_{3,x} = 0 \land \\
\land a_{2,x}a_{3,y} + a_{2,y}b_{1,x} + a_{3,x}b_{1,y} - a_{2,x}b_{1,y} - a_{2,y}a_{3,x} - a_{3,y}b_{1,x} = 0 \land \\
\land a_{1,x}a_{3,y} + a_{1,y}b_{2,x} + a_{3,x}b_{2,y} - a_{1,x}b_{2,y} - a_{1,y}a_{3,x} - a_{3,y}b_{2,x} = 0 \land \\
\land a_{1,x}b_{1,y} + a_{1,y}c_x + b_{1,x}c_y - a_{1,x}c_y - a_{1,y}b_{1,x} - b_{1,y}c_x = 0 \land \\
\land a_{2,x}b_{2,y} + a_{2,y}c_x + b_{2,x}c_y - a_{2,x}c_y - a_{2,y}b_{2,x} - b_{2,y}c_x = 0 \land \\
\land a_{3,x}b_{3,y} + a_{3,y}c_x + b_{3,x}c_y - a_{3,x}c_y - a_{3,y}b_{3,x} - b_{3,y}c_x = 0 \land \\
\land (a_{1,x} - b_{2,x})^2 + (a_{1,y} - b_{2,y})^2 = (b_{2,x} - a_{3,x})^2 + (b_{2,y} - a_{3,y})^2 \land \\
\land (a_{2,x} - b_{1,x})^2 + (a_{2,y} - b_{1,y})^2 = (b_{1,x} - a_{3,x})^2 + (b_{1,y} - a_{3,y})^2 \land \\
\land (a_{1,x} - b_{3,x})^2 + (a_{1,y} - b_{3,y})^2 = (b_{3,x} - a_{2,x})^2 + (b_{3,y} - a_{2,y})^2
\end{gathered}
$$

Большая Советская Энциклопедия:

Алгебра — один из больших разделов математики, принадлежащий наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы алгебры, отличающие ее от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, и в результате поиска общих приемов для решения однотипных арифметических задач. ...

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. *часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. . . .*
2. *Алгебра над полем P, наз. также л и н е й н о й а л г е б р о й. Алгебра в этом смысле есть кольцо, в котором определено умножение элементов на на элементы из P, удовлетворяющее естественным аксиомам . . .*
3. *То же, что универсальная алгебра.*

Иоганн Карл Фридрих Гаусс ?:

Алгебра — это арифметика для лентяев

Алгебра — это геометрия для лентяев

Язык $\mathcal{A}$

- обозначения для всех рациональных чисел, 2,-3,5/7,-451/53,...
- переменные для вещественных чисел, $a, b, c, \dots, a_1, b_2, x_6, \dots$
- операции сложения и умножения, с их помощью строятся многочлены
- отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы: *если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы*
- логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся формулы: *если Φ и Ψ – формулы, то* $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$?
Верно ли $(*)$ при $x = 4, y = 5$?
Верно ли $(*)$ при любых x, y?
Существуют ли x, y такие, что выполнено $(*)$?
Верно ли, что для любого x существует y такое, что выполнено $(*)$?

Язык $\mathcal{A}$

- обозначения для всех рациональных чисел, 2,-3,5/7,-451/53,...
- переменные для вещественных чисел, $a, b, c, \dots, a_1, b_2, x_6, \dots$
- операции сложения и умножения, с их помощью строятся многочлены
- отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы:
  если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся формулы:
  если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

- кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
  если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

Язык $\mathcal{A}$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \;\wedge\; xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \;\wedge\; \exists y\{xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \;\wedge\; xy = 3x + 2y\}$$

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка $\mathcal{A}$ *без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.*

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Жил примерно в 787-850

"Китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-габр в'алмуккабалла"

Язык $\mathcal{A}$ (новая версия)

- обозначения для всех рациональных чисел
- переменные для вещественных чисел
- отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы: если P – многочлен, то $P = 0$, $P > 0$, $P < 0$ – элементарные формулы
- логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка $\mathcal{A}$ без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Тривиальный случай – бескванторная формула

База индукции – однокванторная формула, $\exists x \Phi(x)$ или $\forall x \Phi(x)$

Основная идея

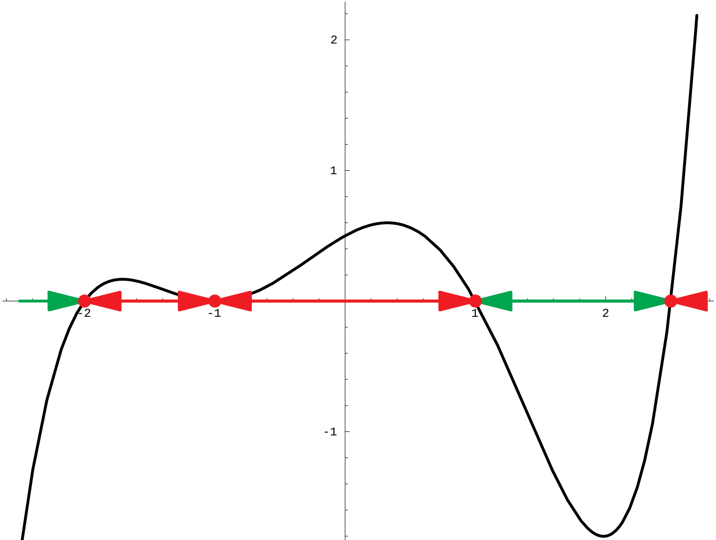
$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$

Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$

Основная идея

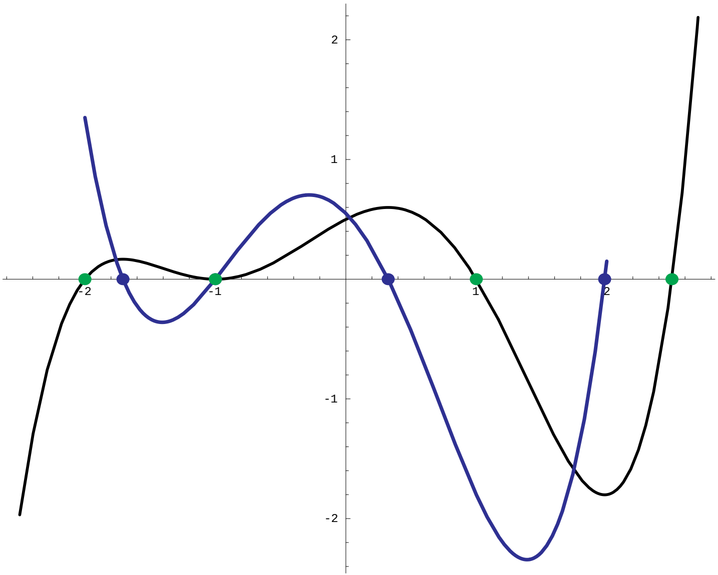
$$\frac{1}{2}+\frac{11}{20}x-\frac{11}{20}x^2-\frac{13}{20}x^3+\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{10}x^5<0$$



"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что
$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$
3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
   - для любого i, такого что $0 < i \leq n$, существует j, такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y_j < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$
4.
   - Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если
   $$\Phi(y_0) \vee \cdots \vee \Phi(y_m)$$
   - Формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если
   $$\Phi(y_0) \wedge \dots \wedge \Phi(y_m)$$

Нули производной



"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ – такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$
5. - Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если
   $$\Phi(x_{-\infty}) \vee \Phi(x_0) \vee \dots \vee \Phi(x_n) \vee \Phi(x_{+\infty})$$
   - Формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если
   $$\Phi(x_{-\infty}) \wedge \Phi(x_0) \wedge \dots \wedge \Phi(x_n) \wedge \Phi(x_{+\infty})$$

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \ldots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$T_0(x_{-\infty})$	$T_0(x_0)$	$\ldots$	$T_0(x_j)$	$\ldots$	$T_0(x_n)$	$T_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	$\ldots$	$T_i(x_j)$	$\ldots$	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$T_k(x_{-\infty})$	$T_k(x_0)$	$\ldots$	$T_k(x_j)$	$\ldots$	$T_k(x_n)$	$T_k(x_{+\infty})$

$$x_{-\infty} < x_0 < \cdots < x_j < \cdots < x_n < x_{+\infty}$$

Если некоторая строка помечена многочленом, который отличен от тождественно нулевого многочлена, и x – корень этого многочлена, то один из столбцов помечен числом x.

Если некоторый не крайний столбец помечен числом x, то одна из строк помечена многочленом, который отличен от тождественно нулевого многочлена, и для которого x является корнем.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.
4. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь содержимым таблицы:

	$x_{-\infty}$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$x_{+\infty}$
$P_0(x)$	$P_0(x_{-\infty})$	$P_0(x_0)$	$\ldots$	$P_0(x_j)$	$\ldots$	$P_0(x_n)$	$P_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$P_i(x_{-\infty})$	$P_i(x_0)$	$\ldots$	$P_i(x_j)$	$\ldots$	$P_i(x_n)$	$P_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$P_k(x_{-\infty})$	$P_k(x_0)$	$\ldots$	$P_k(x_j)$	$\ldots$	$P_k(x_n)$	$P_k(x_{+\infty})$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\ldots$	и/л	$\ldots$	и/л	и/л

5. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны.

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$-\ \lvert 0 \rvert +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$-\ \lvert 0 \rvert +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$-\ \lvert 0 \rvert +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Лемма. *Знаки* $-$ *и* $+$ *не могут стоять в двух соседних по горизонтали клетках.*

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логические значение $\Phi(x)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

5. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны.

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$

Полунасыщенные системы

Определение. *Система функций называется полунасыщенной, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.*

Лемма. *Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной полунасыщенной системы.*

Таблица Тарского

	$-\infty$		x_i	x_{i+1}		$+\infty$
$T_0(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	0	0	$\dots$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$

Лемма. *Если система многочленов* $T_0(x), \dots, T_k(x)$ *полунасыщенна и* $T_i(x) \not\equiv 0$, *то в* i*-ой строке символ* 0 *не может стоять в двух соседних клетках.*

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется полунасыщенной, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. *Полунасыщенная система многочленов* $T_0(x), \ldots, T_n(x)$ *называется насыщенной, если вместе с каждыми двумя многочленами* $T_k(x)$ *и* $T_m(x)$ *такими, что* $0 < \mathrm{degree}(T_m(x)) \leq \mathrm{degree}(T_k(x))$, *она содержит и остаток* $R(x)$ *от деления* $T_k(x)$ *на* $T_m(x)$.

$$T_k(x) \quad = \quad Q(x)T_m(x) + R(x), \qquad \mathrm{degree}(R(x)) < \mathrm{degree}(T_m(x))$$

Лемма. *Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной насыщенной системы.*

Лемма. *Если* $T_0(x), \ldots, T_{k-1}(x), T_k(x)$ *– насыщенная система многочленов, и*

$$\mathrm{degree}(T_0(x)) \leq \cdots \leq \mathrm{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \mathrm{degree}(T_k(x)),$$

то система $T_0(x), \ldots, T_{k-1}(x)$ *также является насыщенной.*

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

$$\mathrm{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \mathrm{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \mathrm{degree}(T_k(x))$$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $T_0(x) \equiv 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$T_0(x)$	0	0

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \ldots, T_k(x)$

Случай $\mathrm{degree}(T_1(x)) = \cdots = \mathrm{degree}(T_k(x)) = 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$T_0(x)$	0	0
$T_1(x)$	$- \mid +$	$- \mid +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- \mid +$	$- \mid +$

Пострение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$			$\dots$		$\dots$		

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$			$\dots$		$\dots$		
$T_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$-\mid+$	$-\mid 0\mid+$	$\dots$	$-\mid 0\mid+$	$\dots$	$-\mid 0\mid+$	$-\mid+$
$T_k(x)$	$?-\mid+$			$?$			$?-\mid+$

$$
\begin{aligned}
T_k(x) &= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0 \\
&= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{p_0}{x^n}\right)
\end{aligned}
$$

Постреније сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \ldots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$T_k(x)$	$-\vert+$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$\ldots$	$?\ -\ \vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$-\vert+$

$$
\begin{aligned}
T_k(x) &= Q(x)\,T_m(x) + T_n(x) \\
T_k(x_j) &= Q(x_j)\,T_m(x_j) + T_n(x_j) = T_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \ldots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$
$T_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \ldots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$?+-$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Алгоритм Тарского для формулы $Q x \Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\mathrm{degree}(T_0(x)) \le \dots \le \mathrm{degree}(T_{\ell-1}(x)) \le \mathrm{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$
5. Вычислить логические значение $\Phi(x)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$						
$T_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_\ell(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

6. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны

Переменных много, но кванторов мало

$$\exists x\{ax+b=0\} \quad \Longleftrightarrow \quad a\neq 0 \vee b=0$$

$$\exists x\{ax^2+bx+c=0\} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ((a\neq 0 \wedge b^2-4ac\geq 0) \vee (a=0 \wedge (b\neq 0 \vee c=0)))$$

Теорема Тарского.
Для любой формулы языка $\mathcal{A}$ существует эквивалентная ей бесквантoрная формула этого же языка.

Устранение квантора из $Qx\Phi(a_1, \ldots, a_k, x)$

Наша цель:

$$Qx\Phi(a_1, \ldots, a_k, x) \Leftrightarrow \Psi(a_1, \ldots, a_k)$$

Роль *рациональных чисел* будут играть *рациональные функции от параметров*, то есть будем работать с выражениями вида

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{N_m(a_1, \ldots, a_k)}{D_m(a_1, \ldots, a_k)} x^m$$

где

$$N_1(a_1, \ldots, a_k),\ \ldots,\ N_n(a_1, \ldots, a_k)$$

и

$$D_1(a_1, \ldots, a_k),\ \ldots,\ D_n(a_1, \ldots, a_k)$$

– многочлены с рациональными коэффициентами.

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\mathrm{degree}(T_0(x)) \le \dots \le \mathrm{degree}(T_{\ell-1}(x)) \le \mathrm{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$
5. Вычислить логические значение $\Phi(x)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$						
$T_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_\ell(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

6. Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны

Улучшения алгоритма

Г. Е. Коллинз (George E. Collins, 1975):
Цилиндрическая алгебраическая декомпозиция (cylindrical algebraic decomposition)