Задание 2

Эти задачи будут разбираться на практическом занятии 19-го сентября. Записывать решения не обязательно, можно их записать, если вы хотите, решение проверили.

PC8. (Unit clause propagation) Говорят, что невыполнимость формулы ϕ в КНФ можно доказать с помощью распространения единичного дизъюнкта, если формула содержит дизъюнкт, содержащий ровно один литерал. Мы делаем подстановку переменной, чтобы выполнить этот литерал, в итоге формула снова содержит дизъюнкт из одного литерала. Мы повторям это, пока не получится, что подстановка обращает в ложь один из дизъюнктов. Покажите, что в этом случае для формулы ϕ существует дерево решений размера $O(n)$, где n — число переменных формулы ϕ.

PC9. Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть все дизъюнкты формулы ϕ зависят только от k переменных с последовательными номерами (т.е. от $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}$ для некоторого $i \in [n-k+1]$). Покажите, что ϕ имеет дерево решений размера $O(n^k)$.

PC10. Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ, минимальное дерево решений для ϕ имеет размер S (мы договорились считать, что размер дерева — это число листьев). Покажите, что в ассимметричной игре Прувера и Делэера существует стратегия для Делэера, которая гарантирует ему заработать хотя бы $\log S$ монет.

Задачи из задания 1, которые остались неразобранными.

PC2. Формула в КНФ называется Хорновской, если в каждый дизъюнкт входит не более одной переменной без знака отрицания. Покажите, что для любой невыполнимой Хорновской формулы существует дерево решений, размер которого ограничен полиномом от длины формулы.

PC4. Покажите, что для любой невыполнимой формулы в 2-КНФ (все дизъюнкты содержат не более двух литералов) есть дерево решений, размер которого ограничен полиномом от числа переменных формулы.

PC5. а) Рассмотрим сюрьективный функциональный принцип Дирихле $\mathrm{ontoFPHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$, который получается добавлением в $\mathrm{PHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$ условий, что каждый кролик сидит не более, чем в одной клетке: $\neg p_{i,j} \vee \neg p_{i,k}$ для всех $i \in [n+1]$ и $j \neq k \in [n]$ и условий, что в каждой клетке кто-то сидит: $p_{1,i} \vee \dots p_{n+1,i}$ для всех $i \in [n]$. Покажите, что размер минимального дерева решений для $\mathrm{ontoFPHP}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}}$ есть $2^{\Theta(n \log n)}$.

б) Рассмотрим формулу $\mathrm{PMP}_{\mathrm{2n+1}}$, кодирующую существование совершенного паросочетания в полном графе на $2n+1$ вершине. Переменные $x_{i,j}$ для $i \neq j \in [2n+1]$ соответствует тому, что ребро (i,j) взято в паросочетание. Дизъюнкты двух видов: 1) у каждой вершины есть пара: $x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \dots \vee x_{i,2n+1}$ для всех $i \in [2n+1]$; 2) У каждой вершины не более одной пары: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k}$ для всех $i \in [2n+1]$ и $j \neq k \in [2n+1]$. Покажите, что размер минимального дерева решений для $\mathrm{PMP}_{\mathrm{2n+1}}$ есть $2^{\Theta(n \log n)}$.

PC6. Рассмотрим семейство формул $\mathrm{ORDER}_{\mathrm{n}}$, которые кодирует, что есть полный порядок на множестве $[n]$, в котором нет минимального элемента. Переменные $x_{i,j}$, где $i \neq j \in [n]$, означают, что $i < j$. Формула содержит дизъюнкты следующего вида:

- Любые два элементы сравнимы: $x_{i,j} \vee x_{j,i}$ для $i \neq j \in [n]$.
- Антисимметричность порядка: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{j,i}$ для $i \neq j \in [n]$.
- Транзитивность порядка: $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{j,k} \vee x_{i,k}$ для $i \neq j \neq k \in [n]$.
- Отсутствие минимального элемента: $\bigvee_{i \neq j} x_{i,j}$ для всех $j \in [n]$.

Покажите, что размер любого дерева решений для $\mathrm{ORDER}_{\mathrm{n}}$ не меньше, чем $2^{\Omega(n)}$.

PC7. Придумать пример семейства невыполнимых формул F_n в k-КНФ размера $poly(n)$, что размер любого дерева решений F_n имеет суперполиномиальный размер (растет быстрее любого полинома), где k — константа.