Теория игр

Илья Кацев[1]

[1] Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН

2013

Предмет

- Конкуренция vs кооперация

Предмет

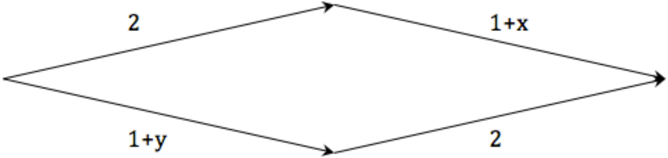
- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = ”правила игры”

Предмет

- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = ”правила игры”
- Рынок работает не всегда

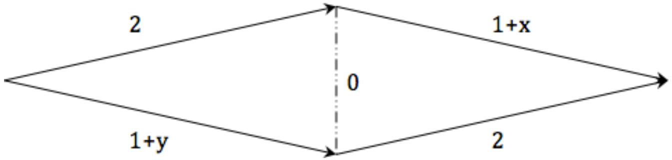
Предмет

- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = "правила игры"
- Рынок работает не всегда



Предмет

- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = ”правила игры”
- Рынок работает не всегда



История

- Библия, Талмуд - некоторые ситуации
- Cournot A (1838), Bertrand J (1883) - конкуренция
- Zermelo E (1913) - шахматы
- Borel E (1921) - стратегические игры для трех стратегий
- von Neumann J, Morgenstern O (1944, 1947) - “Теория игр и экономическое поведение”
- Nash JF (1950, 1951) - Равновесие и арбитражное решение
- Shapley LS (1953) - вектор Шепли
- Бондарева О (1963), Shapley LS (1967) - сбалансированные игры

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{3\}$
$\{12\}$
$\{13\}$
$\{23\}$

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition	*Guarantee*
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	100
$\{12\}$	100
$\{13\}$	200
$\{23\}$	300

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition	*Guarantee*	*Value*
$\{1\}$	0	50
$\{2\}$	0	125
$\{3\}$	100	225
$\{12\}$	100	175
$\{13\}$	200	275
$\{23\}$	300	350

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition	*Guarantee*	*Value*	*Satisfaction*
$\{1\}$	0	50	50
$\{2\}$	0	125	125
$\{3\}$	100	225	125
$\{12\}$	100	175	75
$\{13\}$	200	275	75
$\{23\}$	300	350	50

История

- Библия, Талмуд - некоторые ситуации
- Cournot A (1838), Bertrand J (1883) - конкуренция
- Zermelo E (1913) - шахматы
- Borel E (1921) - стратегические игры для трех стратегий
- von Neumann J, Morgenstern O (1944, 1947) - “Теория игр и экономическое поведение”
- Nash JF (1950, 1951) - Равновесие и арбитражное решение
- Shapley LS (1953) - вектор Шепли
- Бондарева О (1963), Shapley LS (1967) - сбалансированные игры

Борель и стратегические игры

Два игрока, три стратегии.

Выигрыш первого игрока a_{ij}, причем $a_{ii} = 0$.

Первый игрок выбирает стратегию i с вероятностью p_i, второй - с вероятностью q_i. Тогда мат. ожидание выигрыша первого игрока равно

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ a_{23} & -a_{13} & a_{12} \end{vmatrix}$$

История

- Библия, Талмуд - некоторые ситуации
- Cournot A (1838), Bertrand J (1883) - конкуренция
- Zermelo E (1913) - шахматы
- Borel E (1921) - стратегические игры для трех стратегий
- von Neumann J, Morgenstern O (1944, 1947) - “Теория игр и экономическое поведение”
- Nash JF (1950, 1951) - Равновесие и арбитражное решение
- Shapley LS (1953) - вектор Шепли
- Бондарева О (1963), Shapley LS (1967) - сбалансированные игры

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathit{C} & \mathit{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathit{C} \\ \mathit{D} \end{array} & \begin{pmatrix} -1,-1 & -10,0 \\ 0,-10 & -9,-9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad C & \qquad D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1, -1 & -10, 0 \\ 0, -10 & -9, -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1, -1 & -10, 0 \\ 0, -10 & -9, -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1,-1 & -10,0 \\ 0,-10 & -9,-9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Равновесие по Нэшу

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Нет равновесий

Равновесие по Нэшу

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Нет равновесий - используем смешанные стратегии.

Равновесие по Нэшу

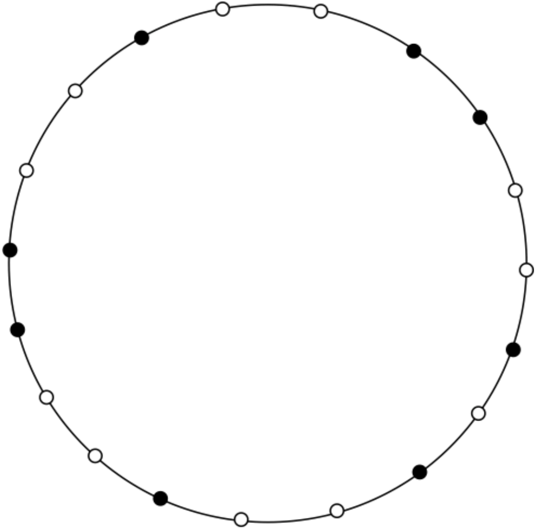
$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Нет равновесий - используем смешанные стратегии.

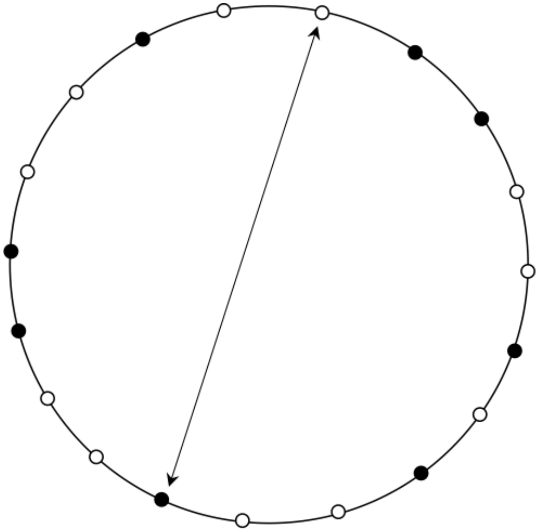
$$\begin{pmatrix} 5,5 & 1,0 \\ 1,0 & 7,7 \end{pmatrix}$$

Что делать, если несколько равновесий?

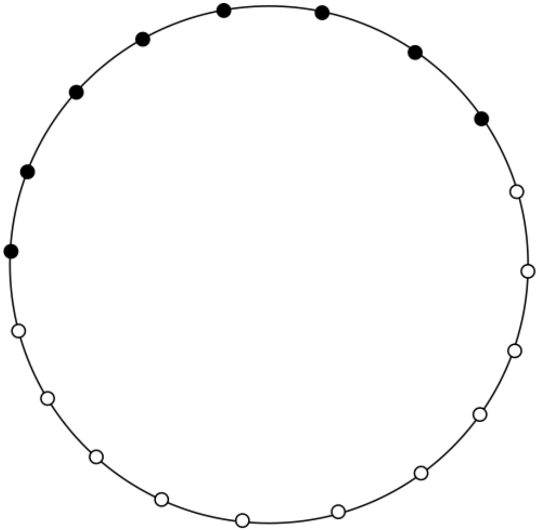
Пример



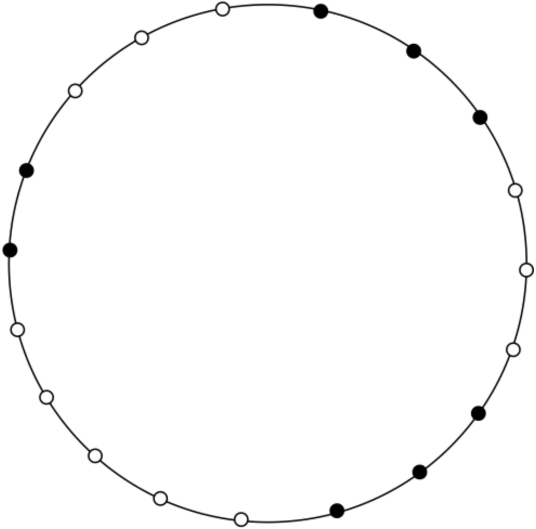
Пример



Пример

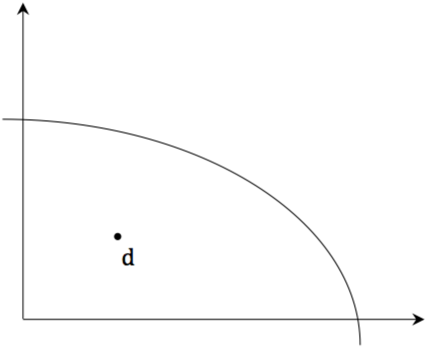


Пример



Арбитражные схемы

Арбитражной схемой называется пара (X, d), где $X \subset \mathbb{R}^2$ - переговорное множество, а $d \in X$ - точка несогласия.



Решением для класса арбитражных схем $\mathcal{B}$ называется отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$.

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.
2. Индивидуальная рациональность: $\varphi(X, d) \geq d$.
3. Независимость от аффинных преобразований: для $a > 0, b \in \mathbb{R}^2$
$$\varphi(aX + b, ad + b) = a\varphi(X, d) + b.$$
4. Анонимность: если $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - симметрия относительно прямой $y = x$, то $\varphi(\pi X, \pi d) = \pi\varphi(X, d)$.
5. Независимость от несущественных альтернатив: если $X\prime \subset X$ и $\varphi(X, d) \in X'$, то $\varphi(X', d) = \varphi(X, d)$.

Теорема (Нэш, 1950)

Существует только одно решение, удовлетворяющее аксиомам 1,3,4,5.

Нобелевские премии

- **1971**, J.Hicks, K.Arrow
  За новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния
- **1994**, J.F.Nash, J.C.Harsanyi, R.Selten
  За анализ равновесия в теории некоалиционных игр
- **2005**, R.Aumann, T.Schelling
  За углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа теории игр
- **2007**, L.Hurwicz, E.Maskin, R.Myerson
  За создание основ теории оптимальных механизмов
- **2012**, A.E.Roth, L.S.Shapley
  За теорию стабильного распределения и практики устройства рынков

Теорема Эрроу

Теорема Эрроу

Аксиома независимости от несущественных альтернатив (АННА)

Рассмотрим 2 задачи группового выбора. Если для двух альтернатив $a, b \in A$ индивидуальные предпочтения участников совпадают в двух задачах, то и отношение коллективного предпочтения совпадает.

Аксиома единогласия

Если $a \succ_i b$ для всех $i \in N$, то $a \succ b$.

Теорема Эрроу

Аксиома независимости от несущественных альтернатив (АННА)

Рассмотрим 2 задачи группового выбора. Если для двух альтернатив $a, b \in A$ индивидуальные предпочтения участников совпадают в двух задачах, то и отношение коллективного предпочтения совпадает.

Аксиома единогласия

Если $a \succ_i b$ для всех $i \in N$, то $a \succ b$.

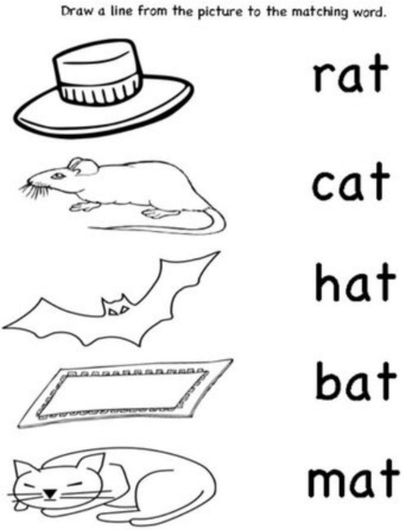
Теорема (Эрроу, 1950)

Пусть $\mathcal{G}$ - класс всех задач группового выбора с числом кандидатов большим двух, так что все возможные комбинации индивидуальных предпочтений допустимы. Пусть правило группового выбора $\succ$ удовлетворяет аксиомам АННА и единогласия. Тогда это правило является диктаторским, т.е. существует такое $i \in N$, что $\succ = \succ_i$.

Нобелевские премии

- **1971**, J.Hicks, K.Arrow
  За новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния
- **1994**, J.F.Nash, J.C.Harsanyi, R.Selten
  За анализ равновесия в теории некоалиционных игр
- **2005**, R.Aumann, T.Schelling
  За углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа теории игр
- **2007**, L.Hurwicz, E.Maskin, R.Myerson
  За создание основ теории оптимальных механизмов
- **2012**, A.E.Roth, L.S.Shapley
  За теорию стабильного распределения и практики устройства рынков

Matching


Draw a line from the picture to the matching word.
rat
cat
hat
bat
mat