

Задание 13 (на 5 декабря)

РС52. Предъявите пример семейства тавтологий ϕ_n , что секвенциальная система без правила сечений, не имеет полиномиальных доказательств формул из ϕ_n .

РС53. Пусть $TS_{G,c}$ — невыполнимая цейтинская формула. Покажите, что $\neg TS_{G,c}$ имеет полиномиальное доказательство в системах Фреге.

РС54. Покажите, что $\neg PHP_n^{n+1}$ имеет полиномиальные доказательства в системах Фреге.

РС18. (Исправлено!) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

РС19. б) Покажите, что если формула ϕ в k -КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S , то за время $n^{O(\log S+k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ .

РС21. Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $TS_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(TS_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.

Определение. Игра с фишками на графе. Пусть G — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число $peb(G)$ — это наименьшее такое число k , что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что k в любой момент времени использовано не более k фишек).

РС30. (Исправлено!) Пусть $G(V, E)$ — ориентированный граф без циклов. Для каждой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу Peb_G : для каждой вершины v в которую ведут ребра в вершин u_1, u_2, \dots, u_k , где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $v \vee \neg u_1 \vee \neg u_2 \vee \dots \vee \neg u_k$ и для всех вершин w исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт $\neg w$. Покажите, что $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$.

РС48. (Исправлено!) Пусть $Q \subseteq \{0, 1\}^n \times M$ — некоторое тотальное отношение. Вероятностным деревом решений для отношения Q называется вероятностное распределение на деревьях решений для отношения Q . Пусть R — вероятностное дерево решений для отношения Q , для каждого $x \in \{0, 1\}^n$ введем $d(R, x)$ — это средняя длина пути, которая соответствует входу x на случайном дереве из R . Покажите, что для любого вероятностного дерева решений R выполняется, что $\max_{x \in \{0, 1\}^n} d(R, x)$ не меньше $\Omega(cbs(Q))$.

РС50. Покажите, что существует семейство невыполнимых формул ϕ_n в 3-КНФ размера $poly(n)$, которые не имеют полиномиального размера доказательств в системе секвенциальной плоскости.

РС51. Пусть ϕ_n — семейство невыполнимых формул в КНФ, $g : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$ — некоторая функция, где $k = O(1)$. а) Известно, что $w_R(\phi) = O(1)$. Покажите, что ϕ_n^g имеет резолюционное опровержение размера $poly(n)$. б) Известно, что ϕ имеет регулярное резолюционное опровержение размера $poly(n)$ и ширины $O(1)$. Покажите, что ϕ_n^g имеет регулярное резолюционное опровержение размера $poly(n)$.