

## Задание 8 (на 31 октября)

**РС37.** Пусть  $I$  — идеал кольца мультилинейных многочленов  $S_n$ . Проверьте, что для любых многочленов  $f, g \in S_n$  выполняется  $R_I(fg) = R_I(fR_I(g))$ , где  $R_I$  — это операция взятия остатка по модулю идеала  $I$ .

**РС38.** Пусть  $\phi$  — невыполнимая формула в КНФ, граф которой является  $(r, c)$ -граничным экспандером. Докажите, что  $w_R(\phi) \geq rc/2$  (не пользуйтесь результатом для исчисления полиномов).

**РС39.** Пусть  $\phi = \bigwedge_1^m C_i$  — некоторая формула в КНФ, граф которой является  $(r, c)$ -граничным экспандером. Пусть подстановка  $\rho$  подставляет некоторым переменным из множества  $I$  значения, где  $|I| \leq cr/2$ . Известно, что  $\bigwedge_{i \in C_I(I)} C_i|_\rho$  — выполнимая формула. Покажите, что для любого множества  $J \subseteq [m]$ , если  $|J| \leq r/2$ , то  $\bigwedge_{i \in J} C_i|_\rho$  — выполнимая формула.

**РС40.** Пусть  $\phi$  — невыполнимая формула в  $k$ -КНФ. Покажите, что число мономов (с учетом повторений) в любом PCR (и PC) доказательстве формулы  $\phi$  не меньше, чем  $2^{\Omega((\deg \phi - k)^2/n)}$ , где  $\deg \phi$  — это минимальная степень доказательства  $\phi$ , а  $n$  — число переменных формулы  $\phi$ .

**РС18.** (Исправлено!) Граф  $G_n$  имеет  $2n$  вершин и строится случайным образом: независимо  $d$  раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе  $d$  с вероятностью  $1 - o(1)$  выполняется  $e(G_n) = \Omega(n)$ .

**РС19.** б) Покажите, что если формула  $\phi$  в  $k$ -КНФ от  $n$  переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера  $S$ , то за время  $n^{O(\log S+k)}$  можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы  $\phi$ .

**РС21.** Пусть  $G_n$  — это сетка  $n \times n$ . Пусть цейтинская формула  $Ts_{G,f}$  невыполнима. Покажите, что  $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$ .

**РС24.** Пусть  $S$  — множество дизъюнктов, возможно пустое. Обозначем через  $neg(S)$  множество дизъюнктов, которое определяется рекурсивно:  $neg(\emptyset) = \{\square\}$ ,  $neg(S \cup \{C\}) = \{D \vee \neg a \mid D \in neg(S), a \in C\}$ , при этом тривиальные дизъюнкты удаляются, и удаляются дизъюнкты, которые являются надмножеством (ослаблением) других дизъюнктов.

а) Проверьте, что ширина любого дизъюнкта из  $neg(S)$  не превосходит  $|S|$ .

б) Проверьте, что для непустого  $S$  множество  $neg(S)$  в точности состоит из минимальных по включению нетривиальных дизъюнктов, что из их отрицания семантически следует конъюнкция дизъюнктов из  $S$ .

в) Покажите, что набор значений переменных выполняет все дизъюнкты множества  $S$  тогда и только тогда, когда он опровергает хотя бы один дизъюнкт из  $neg(S)$ .

г) Покажите, что если из конъюнкции множества дизъюнктов  $S$  семантически следует конъюнкция множества дизъюнктов  $S'$ , то для каждого дизъюнкта  $C \in neg(S)$  существует такой дизъюнкт  $C' \in neg(S')$ , что  $C$  есть ослабление  $C'$ .

д) (Исправлено!) Пусть  $S_0, S_1, \dots, S_t$  — это реализация резолюционного доказательства для невыполнимой формулы  $\phi$  в  $k$ -КНФ, использующая память (clause space)  $s$ . Покажите, что  $neg(S_t), neg(S_{t-1}), \dots, neg(S_0)$  можно дополнить до резолюционного доказательства формулы  $\phi$  ширины не более  $s + k - 3$ .

**Определение.** Игра с фишками на графе. Пусть  $G$  — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число  $peb(G)$  — это наименьшее такое число  $k$ , что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что  $k$  в любой момент времени использовано не более  $k$  фишек).

**РС30.** (Исправлено!) Пусть  $G(V, E)$  — ориентированный граф без циклов. Для каждой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу  $Peb_G$ : для каждой вершины  $v$  в которую ведут ребра в вершин  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , где  $k \geq 0$  пишем дизъюнкт  $v \vee \neg u_1 \wedge \dots \wedge \neg u_k$  и для всех вершин  $w$  исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт  $\neg w$ . Покажите, что  $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$ .

**РС31.** (Исправлено!) Покажите, что любой вывод в исчислении полиномов можно переписать так, чтобы у каждого полинома степень по каждой переменной была бы не более двух и не более

одной переменной входило бы в степени 2 и при этом размер доказательства увеличивается в  $O(n)$  раз, а степень вывода увеличатся не более, чем в константу раз, где  $n$  — число переменных. (Считается, что для начальных полиномов и конечного полинома условие про степень выполняется.)

**Определение.** Пусть  $\phi$  — невыполнимая формула в КНФ. Формула  $\phi^\oplus$  получается из  $\phi$  с помощью такой операции: каждую переменную  $x$  заменяем на  $x' \oplus x''$ , где  $x', x''$  — это новые переменные, после этого приводим получившуюся формулу в КНФ.

**РС34.** Пусть  $\phi$  — это формула в  $k$ -КНФ. Покажите, что  $\phi^\oplus$  — можно представить в виде формулы в  $2k$ -КНФ размера  $|\phi|2^{O(k)}$ .

**РС35.** Покажите, что выполняется неравенство  $S_T(\phi^\oplus) \geq 2^{d(\phi)}$ .

**РС36.** Покажите, что  $S_R(\phi^\oplus) \geq 2^{\Omega(w_R(\phi))}$ .