

Алгоритмы для NP-трудных задач

Лекция 6: Приближенные алгоритмы

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ
<http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub/>

1 / 27

План лекции

- 1 Задача о коммивояжере
 - Точный алгоритм для TSP
 - 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - Неприближаемость TSP
- 2 Задача о рюкзаке

3 / 27

NP-трудность

- Задача о коммивояжере является NP-трудной.
- Тривиальный алгоритм перебирает все возможные пути за время $n!$.
- Наилучший известный на данный момент алгоритм основан на динамическом программировании и имеет время работы (а также память) 2^n .
- Задача о коммивояжере в метрическом пространстве тоже является NP-трудной.
 - допустим, мы умеем решать эту задачу за полиномиальное время
 - возьмем произвольный граф и присвоим всем его ребрам вес 1
 - между любыми двумя не соединенными ребром вершинами добавим ребро веса 2
 - тогда построение минимального гамильтонова цикла в полученном графе эквивалентно ответу на вопрос, существует ли в исходном графе гамильтонов цикл

5 / 27

Задача о коммивояжере

Алгоритм

DYNAMIC-TSP(G)

- для каждого непустого подмножества $S \subseteq \{2, \dots, n\}$ и для каждой вершины $i \in S$ через $Opt[S, i]$ будем обозначать длину кратчайшего маршрута, начинающегося в вершине 1, проходящего через все вершины $S - \{i\}$ и заканчивающегося в вершине i
- последовательно заполнить матрицу:
 $Opt[S, i] = \min\{Opt[S - \{i\}, j] + d(i, j) : j \in S - \{i\}\}$
- вернуть оптимальную стоимость маршрута:
 $\min\{Opt[\{2, \dots, n\}, j] + d(j, 1) : 2 \leq j \leq n\}$

7 / 27

- 1 Задача о коммивояжере
 - Точный алгоритм для TSP
 - 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - Неприближаемость TSP

- 2 Задача о рюкзаке

2 / 27

Задача о коммивояжере

Определение

- Дан полный неориентированный граф $G = (V, E)$, каждому ребру (u, v) которого приписана некоторая стоимость $c(u, v)$.
- **Задача о коммивояжере** (travelling salesman problem, TSP) заключается в нахождении в графе гамильтонова цикла минимальной стоимости.
- **Задача о коммивояжере в метрическом пространстве** (metric TSP) есть частный случай задачи о коммивояжере, где расстояния входного графа удовлетворяют неравенству треугольника:

$$c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w) \quad \forall u, v, w \in V.$$

4 / 27

План лекции

- 1 Задача о коммивояжере
 - Точный алгоритм для TSP
 - 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - Неприближаемость TSP

- 2 Задача о рюкзаке

6 / 27

Сложность алгоритма

Лемма

Сложность алгоритма DYNAMIC-TSP по времени и по памяти есть $\text{poly}(n)2^n$.

Факт

Данный теоретический алгоритм был представлен в 1962-м году и до сих пор является самым быстрым из известных.

8 / 27

1 Задача о коммивояжере

- Точный алгоритм для TSP
- 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
- 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
- Неприближаемость TSP

2 Задача о рюкзаке

Алгоритм

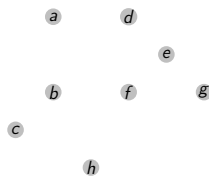
APPROX-TSP(G)

- строим минимальное остовное дерево T графа G
- продублируем каждое ребро дерева T и в полученном графе найдем эйлеров цикл
- выкинем из полученного цикла все повторения вершин и вернем полученный цикл

Пример работы алгоритма

Алгоритм

APPROX-TSP(G)

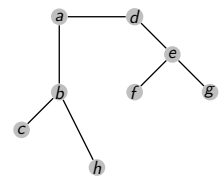


Пример работы алгоритма

Алгоритм

APPROX-TSP(G)

- строим минимальное остовное дерево T графа G

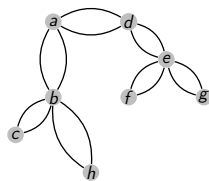


Пример работы алгоритма

Алгоритм

APPROX-TSP(G)

- строим минимальное остовное дерево T графа G
- продублируем каждое ребро дерева T и в полученном графе найдем эйлеров цикл

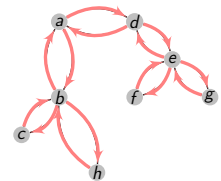


Пример работы алгоритма

Алгоритм

APPROX-TSP(G)

- строим минимальное остовное дерево T графа G
- продублируем каждое ребро дерева T и в полученном графе найдем эйлеров цикл

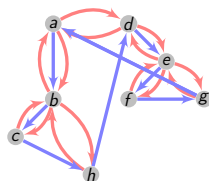


Пример работы алгоритма

Алгоритм

APPROX-TSP(G)

- строим минимальное остовное дерево T графа G
- продублируем каждое ребро дерева T и в полученном графе найдем эйлеров цикл
- выкинем из полученного цикла все повторения вершин и вернем полученный цикл



Анализ алгоритма

Теорема

Алгоритм APPROX-TSP является 2-приближенным.

Доказательство

- пусть W_T — вес минимального остовного дерева, а W_{opt} — вес оптимального гамильтонова цикла
- $W_T \leq W_{opt}$, поскольку при выкидывании ребра из гамильтонова цикла получается остовное дерево
- каждое ребро построенного гамильтонова цикла заменяет какой-то путь эйлерова цикла, длина которого по неравенству треугольника не менее длины этого ребра
- значит, длина найденного пути не превосходит $2W_T$, а следовательно, и $2W_{opt}$

1 Задача о коммивояжере

Точный алгоритм для TSP
 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 Неприближаемость TSP

2 Задача о рюкзаке

13 / 27

Анализ алгоритма

Теорема

Алгоритм APPROX-TSP-IMPROVED является 3/2-приближенным.

Доказательство

- как и в предыдущем доказательстве, вес построенного цикла не превосходит $W_T + W_P$, где W_P — вес минимального паросочетания вершин нечетной степени дерева T
- нужно показать, что $W_P \leq W_{\text{opt}}/2$
- обозначим через A множество всех вершин нечетной степени дерева T
- рассмотрим такой гамильтонов цикл на вершинах множества A : вершины множества A в нем будут встречаться в такой последовательности, в какой они идут в оптимальном гамильтоновом цикле графа G

15 / 27

Известные оценки

Факт

- Если $P \neq NP$, то не существует $\frac{117}{116}$ -приближенного алгоритма для задачи о коммивояжере в метрическом пространстве.
- $3/2$ — лучшее известное приближение для задачи о коммивояжере в метрическом пространстве.
- Для случая, когда все ребра имеют вес 1 или 2, известен $5/6$ -приближенный алгоритм.

17 / 27

Неприближаемость задачи о коммивояжере

Теорема

Пусть $P \neq NP$ и $\alpha(n) = c \in \mathbb{N}$. Тогда не существует $\alpha(n)$ -приближенного алгоритма для задачи о коммивояжере.

Доказательство

- предположим, что такой алгоритм все-таки существует
- возьмем произвольный граф и присвоим всем его ребрам вес 1
- между любыми двумя не соединенными ребром вершинами добавим ребро веса $cn + 1$
- заметим теперь, что если в исходном графе существует гамильтонов цикл, то в новом графе существует гамильтонов цикл веса n

19 / 27

Алгоритм

APPROX-TSP-IMPROVED(G)

- строим минимальное остовное дерево T графа G
- найдем минимальное полное паросочетание всех вершин дерева T нечетной степени
- добавим найденные ребра в дерево T и найдем в полученном графе эйлеров цикл
- выкинем из полученного цикла все повторения вершин и вернем полученный цикл

14 / 27

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- важно отметить, что нам не нужно строить такой цикл; нам важен лишь факт его существования
- разбив вершины только что построенного цикла на четные и нечетные, мы получим два паросочетания
- вес хотя бы одного из них будет не более $W_{\text{opt}}/2$
- значит, и вес минимального паросочетания не превосходит $W_{\text{opt}}/2$ \square

16 / 27

План лекции

1 Задача о коммивояжере

Точный алгоритм для TSP
 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 Неприближаемость TSP

2 Задача о рюкзаке

18 / 27

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- если же такого цикла в исходном графе нет, то самый дешевый цикл в новом графе имеет вес хотя бы $(nc + 1) + (n - 1) > nc$
- таким образом, с помощью $\alpha(n)$ -приближенного алгоритма для задачи о коммивояжере мы можем понять, стоимость оптимального цикла в построенном графе превосходит n или нет
- а это позволит нам понять (за полиномиальное время!), есть в исходном графе гамильтонов цикл или нет
- но тогда $P = NP$ \square

20 / 27

- 1 Задача о коммивояжере
 - Точный алгоритм для TSP
 - 2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - 3/2-приближенный алгоритм для Metric TSP
 - Неприближаемость TSP
- 2 Задача о рюкзаке

Определение

- Дано n предметов с весами $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$ и стоимостями $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$, а также общий вес W .
- **Задача о рюкзаке** (knapsack problem) заключается в нахождении такого множества предметов $I \subseteq [1..n]$, что $\sum_{i \in I} w_i \leq W$ и $\sum_{i \in I} p_i$ максимально.
- NPO, $\max_{i \in [1..n]} w_i \leq W$.

Точный псевдополиномиальный алгоритм

Алгоритм

PSUEDOPOLY-KNAPSACK($\{w_i\}, \{p_i\}, W$)

- $S := \sum_{i \in [1..n]} p_i$
- $P := \max_{i \in [1..n]} p_i$
- через $w(k, p)$ обозначим минимальный объем, необходимый для того, чтобы уложить предметы с номерами, не превосходящими $k \in [1..n]$, общей стоимостью не менее $p \leq S$
- в цикле по k от 1 до n вычисляем $w(k, p)$ для каждого p от 1 до S
 - $w(0, 0) = 0; w(0, p) = \infty, p > 0$
 - $w(k + 1, p) = \min\{w(k, p), w(k, p - p_{k+1}) + w_{k+1}\}$
- return максимальное p , для которого $w(n, p) \leq W$

Анализ времени работы

- Ясно, что алгоритм работает не более, чем nS , то есть не более $n^2 P$.
- Значит, мы могли бы решить задачу за полиномиальное время, если бы p_i были достаточно маленькими.
- Идея: выберем достаточно большое число и разделим на него все стоимости. Оптимальное решение не перестанет быть оптимальным, а время работы алгоритма уменьшится.
- В чем же тогда подвох?
- Стоимости могут перестать быть целыми после деления.
- Округлим их и будем надеяться, что потеряли мы от этого не очень много.

Полностью полиномиальная приближенная схема

- итак, пусть задан ϵ , определяющий, с какой точностью мы хотим найти ответ
- пусть $K_\epsilon = \frac{P}{(1+\epsilon/n)}$
- поделим все p_i на K_ϵ и округлим: $p'_i = \lceil p_i / K_\epsilon \rceil$
- запустим PSUEDOPOLY-KNAPSACK на полученном наборе стоимостей
- время работы алгоритма не превосходит $n^2 \max p'_i \leq n^3 P(1 + 1/\epsilon) / P$
- осталось доказать, что полученный алгоритм дает достаточно хорошее приближение

Оценка приближения

- пусть A_ϵ — общая стоимость набора предметов, который вернул алгоритм
- заметим, что $A_\epsilon \geq A_{\text{opt}} - K_\epsilon n$: псевдополиномиальный алгоритм находит точное решение, поэтому отклонение могло появиться только при округлении; при округлении могло потеряться не более 1 на каждом предмете, эта потеря домножается на K_ϵ при обратном переходе от p'_i к p_i

Оценка приближения (продолжение)

- $A_{\text{opt}} \geq P$, так как в рюкзак можно просто засунуть самый дорогой предмет
- тогда

$$\frac{A_\epsilon}{A_{\text{opt}}} \geq \frac{A_{\text{opt}} - K_\epsilon}{A_{\text{opt}}} = 1 - \frac{Pn}{A_{\text{opt}}n(1 + 1/\epsilon)} \geq 1 - \frac{1}{1 + 1/\epsilon} = \frac{1}{\epsilon + 1}$$

- следовательно, $A_\epsilon \geq (1 - \epsilon)A_{\text{opt}}$