Задание 11 (на 21 ноября)

$\boxed{\textbf{PC46.}}$ Покажите, что вероятностная коммуникационная сложность функции $GT_n(x,y)$, которая проверяет, верно ли, что n-битное число x не меньше n-битного числа y, есть $poly(\log n)$.

$\boxed{\textbf{PC47.}}$ а) Есть совместная над $\mathbb{R}$ система нестрогих линейных неравенств $Ax \geq b$, ранг матрицы A равен r. Покажите, что существует такие r неравенств этой системы, что если заменить их на равенства, то получится совместная линейная система уравнений, любое решение которой будет решением исходной системы неравенств. б) Покажите, что для любых целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ можно подобрать целые числа $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b'$, что

- при всех $x_1, x_2, \cdots x_n \in \{0,1\}^n$ неравенство $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенсвто $\sum_{i=1}^n a'_i x_i \geq b'$
- $\max\{|a'_1|, |a'_2|, \dots, |a'_n|, |b'|\} \leq 2^{O(n \log n)}$.

$\boxed{\textbf{PC48.}}$ (**Исправлено!**) Пусть $Q \subseteq \{0,1\}^n \times M$ — некоторое тотальное отношение. Вероятностным деревом решений для отношения Q называется вероятностное распределение на деревьях решений для отношения Q. Пусть R — вероятностное дерево решений для отношения Q, для каждого $x \in \{0,1\}^n$ введем $d(R,x)$ — это средняя длина пути, которая соовтетствует входу x на случайном дереве из R. Покажите, что для любого вероятностного дерева решений R выполняется, что $\max_{x \in \{0,1\}^n} d(R,x)$ не меньше $\Omega(cbs(Q))$.

$\boxed{\textbf{PC18.}}$ (**Исправлено!**) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

$\boxed{\textbf{PC19.}}$ б) Покажите, что если формула ϕ в k-КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S, то за время $n^{O(\log S + k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ.

$\boxed{\textbf{PC21.}}$ Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $Ts_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.

Определение. Игра с фишками на графе. Пусть G — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число $peb(G)$ — это наименьшее такое число k, что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что k в любой момент времени использовано не более k фишек).

$\boxed{\textbf{PC30.}}$ (**Исправлено!**) Пусть $G(V,E)$ — ориентированный граф без циклов. Для кажой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу Peb_G: для каждой вершины v в которую ведут ребра в вершин $u_1, u_2, \dots, u_k$, где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $v \vee \neg u_1\ lor \neg u_2 \vee \dots \neg u_k$ и для всех вершин w исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт $\neg w$. Покажите, что $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$.

$\boxed{\textbf{PC44.}}$ **Исправлено!** Покажите, что для любого разбиения переменных невыполнимой цейтинской формулы TS_G, построенной по графу константной степени, на две части, отношение $Search_{TS_G}$ имеет дэг прямоугольников размера $poly(n)$.

$\boxed{\textbf{PC45.}}$ Рассмотрим следующую кодировку принципа Дирихле. Есть m кроликов, n клеток и k ключей от клеток. Известно, что $k > m > n$. Каждый ключ открывает некоторое (непустое) множество клеток, каждый кролик получает хотя бы один ключ, никакие два кролика не получают один и тот же ключ, и известно, что если два ключа выданы, то они не открывают одну и ту же клетку. а) Запишите сказанное с помощью формулы $KPHP_n^{m,k}$ в КНФ, используя переменные:

- $p_{i,l}$, которая означает, что кролик i получил ключ l для $i \in [m], l \in [k]$;
- $h_{l,j}$, которая означает, что ключ l открывает клетку j для $l \in [k], j \in [n]$;
- $u_{l,l'}$, которая означает, что ключи l и l' оба на руках для $l, l' \in [k]$;

б) Верно ли, что $KPHP_n^{m,k}$ имеет опровержение в CP размера $poly(k)$?