Задание 12 (на 28 ноября)

PC49. а) Пусть Π — система доказательств из $Sem_D(t)$ (т.е. система доказательств оперирует функциями, у которых детерминированная коммуникационная сложность не более t для любого разбиения переменных). Пусть $S_0, S_1, \dots, S_m$ — это реализация доказательства формулы ϕ в памяти, при этом в каждом S_i не больше s функций. Покажите, что $st \log m \geq CC(Search_\phi)$. б) Сформулируйте аналогичное утверждение для систем доказательств из $Sem_R(t)$ (детерминированная сложность заменяется на вероятностную).

PC50. Покажите, что существует семейство невыполнимых формул ϕ_n в 3-КНФ размера $poly(n)$, которые не имеют полиномиального размера доказательств в системе секущие плоскости.

PC51. Пусть ϕ_n — семейство невыполнимых формул в КНФ, $g : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ — некоторая функция, где $k = O(1)$. а) Известно, что $w_R(\phi) = O(1)$. Покажите, что ϕ_n^g имеет резолюционное опровержение размера $poly(n)$. б) Известно, что ϕ имеет регулярное резолюционное опровержение размера $poly(n)$ и ширины $O(1)$. Покажите, что ϕ_n^g имеет регулярное резолюционное опровержение размера $poly(n)$.

PC18. (**Исправлено!**) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

PC19. б) Покажите, что если формула ϕ в k-КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S, то за время $n^{O(\log S + k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ.

PC21. Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $Ts_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.

Определение. Игра с фишками на графе. Пусть G — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число $peb(G)$ — это наименьшее такое число k, что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что k в любой момент времени использовано не более k фишек).

PC30. (**Исправлено!**) Пусть $G(V,E)$ — ориентированный граф без циклов. Для кажой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу Peb_G: для каждой вершины v в которую ведут ребра в вершин $u_1, u_2, \dots, u_k$, где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $v \vee \neg u_1\ lor \neg u_2 \vee \dots \neg u_k$ и для всех вершин w исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт $\neg w$. Покажите, что $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$.

PC47. а) Есть совместная над $\mathbb{R}$ система нестрогих линейных неравенств $Ax \geq b$, ранг матрицы A равен r. Покажите, что существует такие r неравенств этой системы, что если заменить их на равенства, то получится совместная линейная система уравнений, любое решение которой будет решением исходной системы неравенств. б) Покажите, что для любых целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ можно подобрать целые числа $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b'$, что

- при всех $x_1, x_2, \cdots x_n \in \{0,1\}^n$ неравенство $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенсвто $\sum_{i=1}^n a'_i x_i \geq b'$
- $\max\{|a'_1|, |a'_2|, \dots, |a'_n|, |b'|\} \leq 2^{O(n \log n)}$.

PC48. (**Исправлено!**) Пусть $Q \subseteq \{0,1\}^n \times M$ — некоторое тотальное отношение. Вероятностным деревом решений для отношения Q называется вероятностное распределение на деревьях решений для отношения Q. Пусть R — вероятностное дерево решений для отношения Q, для каждого $x \in \{0,1\}^n$ введем $d(R,x)$ — это средняя длина пути, которая соовтетствует входу x на случайном дереве из R. Покажите, что для любого вероятностного дерева решений R выполняется, что $\max_{x \in \{0,1\}^n} d(R,x)$ не меньше $\Omega(cbs(Q))$.