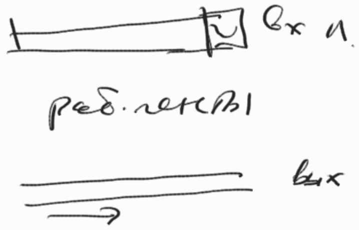
dmitrits@pdmi.ras.ru

Опр. $A \le_\ell B \iff \exists f$ — функция, вычисл. с исп. $O(\log n)$ памяти: $\forall x$

$x \in A \iff f(x) \in B$.



Св-ва $\le_\ell$

1) $A \le_\ell B \Rightarrow A \le_p B$

2) $A \le_\ell B$, $B \le_\ell C \Rightarrow A \le_\ell C$

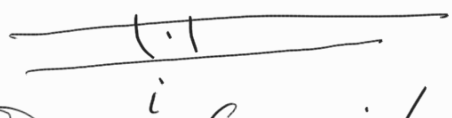
3) $A \le_\ell B$, $B \in L = DSPACE[\log n] \Rightarrow A \in L$

Лемма f и g две функции, вычислимые с исп. $O(\log n)$ памяти. Тогда $f(g)$ тоже вычисл. с исп. $O(\log n)$ памяти.

Д-во $\qquad O(\log|x|)$ памяти

$f(g(x))$

Запустим машину для f, если нужен i-ый бит $g(x)$, то запустим машину для $g(x)$ и отсчитаем i-й бит, не храня предыдущие



$\le_\ell$ $\qquad$ CircuitValue $= \{ (C, x) \mid C$ — схема, $C(x) = 1 \}$

CircuitValue $\in P$

Утв. CircuitValue явл-ся полным в P отн. по $\le_\ell$.

Д-во Пусть $A \in P$ $\quad$ A реш. м.Т. M за

$x \longmapsto (C_{M,|x|}, x)$

схема, моделир. м.Т. M

$x \in A \iff M(x) = 1 \iff C_{M,|x|}(x) = 1$

Ув NSPACE[S(n)] состоит из языков, которые распознаются М.Т. с лентой подсказки, по которой головка может двигаться только слева-направо. Такая машина принимает вход, если ∃ такое содерж. ленты-подсказки, что машина приходит в f.доп. При этом машина исп. $O(S(n))$ ячеек памяти на рабочих лентах

лента подск →

лента входа (read only)

|вход|

→

{ раб. ленты

$\underline{б_0}, \underline{б_1}$

↑

$NL = NSPACE[\log n]$

DPATH = {(G, s, t) | G ор. граф, из s в t есть путь}

Теорема DPATH является NL-полным.

Сл-ие DPATH ∈ L ⟶ (NL = L)

UPATH = {(G, s, t) | G - неориент граф, из s в t есть путь} ∈ L (Теорема Рейнгольда)

Д-во DPATH ∈ NL

(G, s, t) $\quad \underline{s = u_1, u_2, \ldots, u_k = t}$

NL-полнота.

2) DPATH

∀ A ∈ NL $\quad$ A распозн. НМТ, исп. $O(\log n)$ памяти

$x \mapsto (G_x, K_0, K_{accept})$ $\quad$ poly(n) вершин.

} раб.

X класс сложности $\quad coX = \{\overline{L} \mid L \in X\}$

$coNP \overset{?}{=} NP$

<u>Теорема</u> (Иммерман) $\quad \overline{DPATH} \in NL$

$\overline{DPATH} = \{(G, s, t) \mid G$ ор. графа, нет пути из s в $t\}$

<u>Д-во</u> $\quad S_i = \{$мн-во верш, на расст. $\leq i$ от $s\}$ $\quad n$ – число верш. в G.

$(t \notin S_n)$

$S_0 = \{s\}$

1) $v \in S_i$ можно коротко сертифицир. док-во

$u_1, u_2, \ldots, u_k$ $\quad k \leq i$ $\quad (u_j, u_{j+1}) \in E$ $\quad u_k = v$ $\quad u_1 = s$

2) $v \notin S_i$, если известен размер $|S_i| = k$

$u_1, \ldots, u_k$ $\quad u_1 < u_2 < \ldots < u_k$

серт. принадл. $u_j \in S_i$

3) $v \notin S_i$, если известно, что $|S_{i-1}| = k$

$u_1, \ldots, u_k$ $\quad u_1 < u_2 \ldots < u_{k+}$

серт пр S_{i-1} $\quad$ серт $\in S_{i-1}$

4) $|S_i|$, если известен размер $|S_{i-1}|$

1 (серт. $\in S_i$ / $\notin S_i$ при изв $|S_{i-1}|$), 2 (. . .)

3 (. . .) $\quad$ n (. . .)

5) $t \notin S_n$ $\quad |S_1|$

$|S_0| = 1$ $\quad |S_2|$ при изв

$|S_3|$ при изв $|S_2|$ . . . $\quad t \notin S_n$ при изв. $|S_{n-1}|$

Сл-ие $NL = coNL$

Д-во $coNL \subseteq NL$

$\angle\, A \in coNL \Rightarrow \overline{A} \in NL$

$\overline{A} \leq_{\ell} DPATH \in coNL \Rightarrow \overline{A} \in coNL \Rightarrow A \in NL$

NL и $coNL$ замкнуты отн-но сведений.

$A \in NL \Rightarrow A \leq_p DPATH \in coNL$

$\Rightarrow A \in coNL$

Утв. NL и $coNL$ замкнуты отн-но $\leq_{\ell}$.

Д-во $\underline{A \leq_{\ell} B}$, $\underline{B \in NL}$.

Сл-ие $s(n) \geq \log n$ — констр. по памяти ф-ция, то $NSPACE[s(n)] = coNSPACE[s(n)]$

Д-во

$\angle\, A \in NSpace[s(n)]$ $\qquad M$ $O(s(n))$ памяти

$A \qquad x \mapsto (G_{x}, k_0, k_{accept})$

$O(S(n))$ $\qquad 2^{O(S(n))}$

$\subseteq \underbrace{coNSPACE(S(n))}$

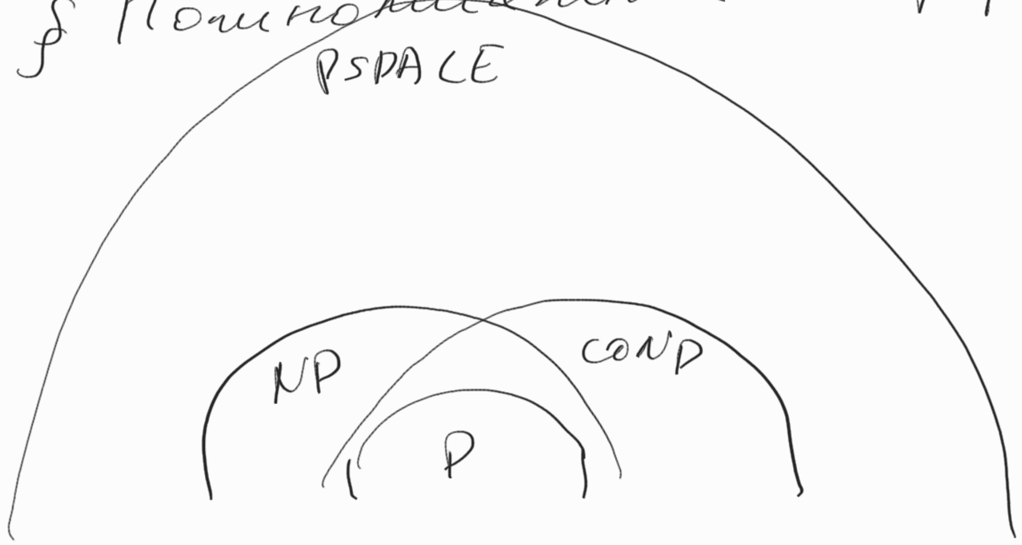
$A \in coNSpace[S(n)]$

$\bar{A} \in NSpace[S(n)]$

$\bar{A} \in coNSPACE[S(n)] \Rightarrow A \in NSpace[S(n)]$

---

§ Полиномиальная иерархия



$L \in NP \Leftrightarrow$

$\exists$ эффект. сист. д-в Π!

$\forall x$

$x \in L \Leftrightarrow$

$\underline{\exists\ y}\ |y| \le q(|x|):$

$\Pi(x,y) = 1$

$\Sigma_0^P, \Pi_0^P, \Sigma_1^P, \Pi_1^P, \Sigma_2^P, \Pi_2^P, \dots$

$\Sigma_0^P = \Pi_0^P = P$

$\Sigma_1^P = NP \qquad \Pi_1^P = coNP$

$L \in \Sigma_i^P \Leftrightarrow \exists$ язык $L' \in \Pi_{i-1}^P$

$i \geq 1$

и полином p:

$\forall x\ x \in L \Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{p(|x|)} : (x,y) \in L'$

$L \in \Pi_i^P \iff \exists$ язык $L' \in \Sigma_{i-1}^P$

и полином p:

$$\forall x \quad x \in L \iff \forall y \in \{0,1\}^{p(|x|)} (x,y) \in L'$$

$L \in \Sigma_i^P \iff \exists$ язык L и $\exists$ полин. пров. предикат Q: $\exists$ полином p:

$$\forall x \quad x \in L \iff \exists y_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall y_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots y_i \, Q(x, y_1, \ldots y_i) = 1$$

$L \in \Pi_i^P$ ——— // ———

$$x \in L \iff \forall y_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists y_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots y_i \, Q(x, y_1, \ldots y_i) = 1$$

Σ_1^P, Σ_2^P — — —

$\Pi_1^P \quad \Pi_2^P$ — — —

$PH = \bigcup_i \Sigma_i^P$

полин. иерархия

Св-ва полином. иерархии

1) $NP = \Sigma_1^P$, $coNP = \Pi_1^P$

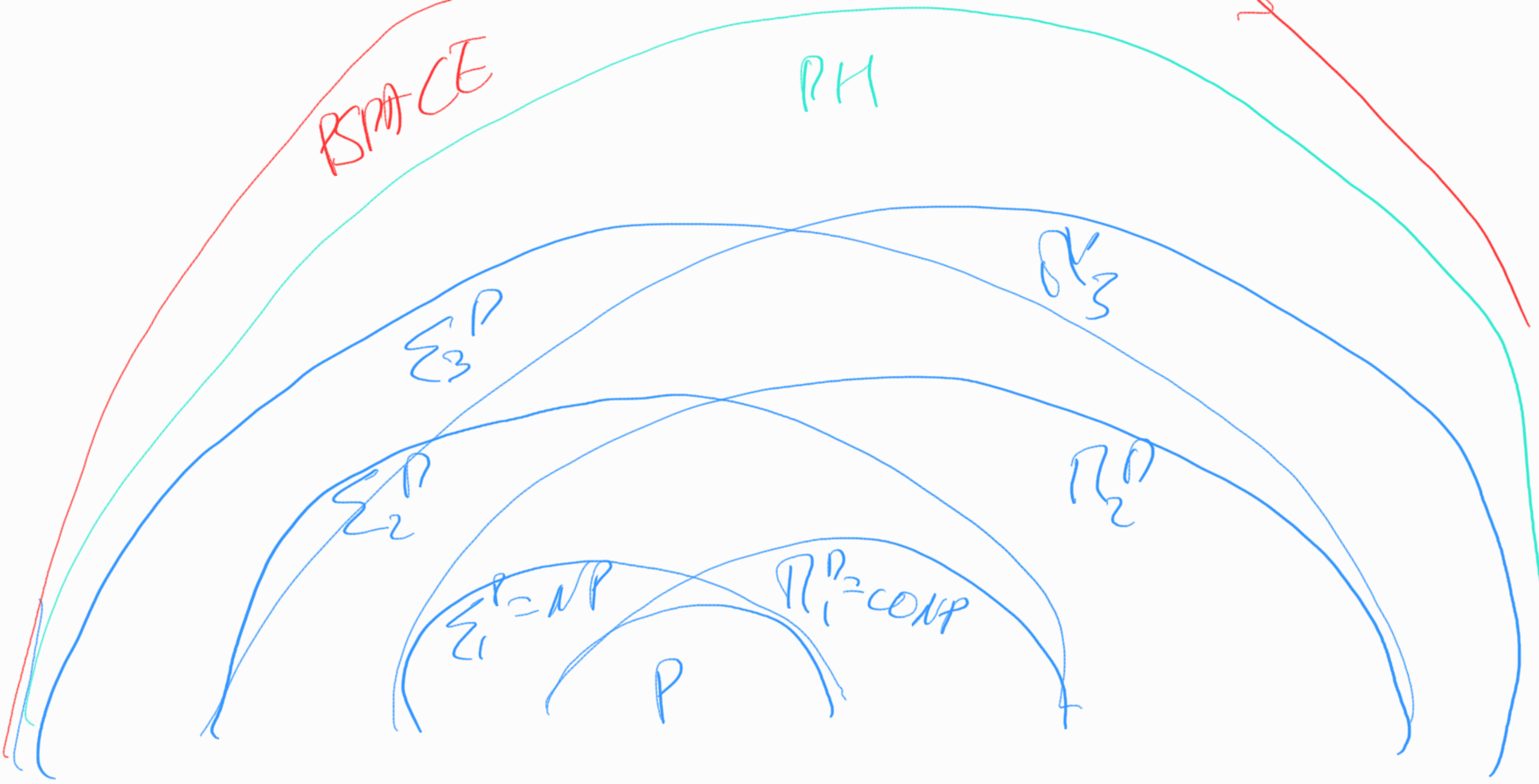
2) $\Pi_i^P = co\Sigma_i^P$

3) $\Sigma_i^P \cup \Pi_i^P \subseteq \Sigma_{i+1}^P \cap \Pi_{i+1}^P$

$\Sigma_i^P \subseteq \Sigma_{i+1}^P \qquad \Pi_i^P \subseteq \Pi_{i+1}^P$

$\Sigma_i^P \subseteq \Pi_{i+1}^P \qquad \Pi_i^P \subseteq \Sigma_{i+1}^P$

4) $PH = \bigcup_i \Sigma_i^P = \bigcup_i \Pi_i^P$



5) $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \implies PH = \Sigma_i^P$

6) $P = NP = coNP = \Sigma_1^P = \Pi_1^P \implies$

$\implies PH = \Sigma_1^P = P$

$SAT \notin TISP[n^{1.1}, n^{0.1}]$