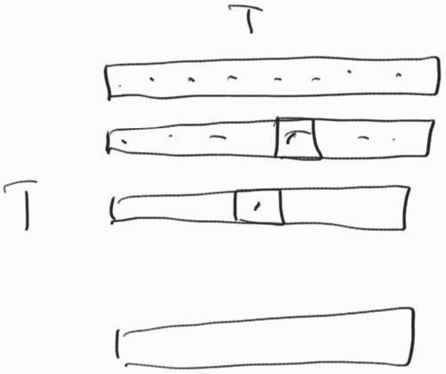
Вычисления с ограничениями и по времени, и по памяти.

$\underbrace{TI}\underbrace{SP}[t(n), s(n)]$ — это мн-во языков, кот. расп. дет. М.Т. за $O(t(n))$ шагов и с исп. $O(s(n))$ ячеек памяти

Теорема $NTime[n] \not\subseteq TISP[n^{1.2}, n^{0.2}]$

Лемма $\forall$ язык из $NTime[T(n)]$ сводится к SAT за время $\underbrace{O(T(n) \log T(n))}$ с исп. $poly(\log T(n))$ ячеек памяти.



2-ленточ. М.Т.
Забывчивые М.Т.

Сл-ие $SAT \notin TISP[n^{1.1}, n^{0.1}]$

Д-во сл-ия из теоремы и леммы/

$\exists$ $SAT \in TISP[n^{1.1}, n^{0.1}]$

$\measuredangle$ $L \in NTime[n]$ по лемме он сводится за $O(n \log n)$ шагов и $poly(\log n)$ памяти к SAT.

$x \quad |x| = n \xrightarrow{f} |\varphi| = O(n \log n)$

$\exists$ алгоритм, кот. проверит вып. f с исп. $O((n \log n)^{1.1})$ шагов и

$(n \log n)^{0.1}$ памяти

$O(n^{1.2})$ шагов и $n^{0.2}$ памяти

$\Rightarrow L \in TISP[n^{1.2}, n^{0.2}]$

Теорема $NTime[n] \notin TISP[n^{1.2}, n^{0.2}]$

Д-во теоремы

Лемма 1 $TISP[n^{12}, n^2] \subseteq \Sigma_2 Time[n^8]$

Лемма 2 $NTime[n] \subseteq DTime[n^{1.2}] \Rightarrow \Sigma_2 Time[n^8] \subseteq NTime[n^{9.6}]$.

Выведем теорему из лемм 1 и 2

Пусть $NTime[n] \subseteq TISP[n^{1.2}, n^{0.2}]$

Тогда $NTime[n^{10}] \subseteq TISP[n^{12}, n^2] \underset{\text{лемма 1}}{\subseteq} \Sigma_2 Time[n^8] \subseteq NTime[n^{9.6}]$.

противоречие с теоремой об иерархии для NTime.

Лемма 1 $TISP[n^{12}, n^2] \subseteq \Sigma_2 Time[n^8]$

Д-во $L \in TISP[n^{12}, n^2]$

реш. Д.М.Т. M за время $c \cdot n^{12}$, с исп. $c' n^2$ ячеек памяти.

$K_1 \to K_2 \to \ldots \to K_{n^{12}}$

$x \in L \Longleftrightarrow \exists K_1, K_2, \ldots, K_{n^6}$:

K_1 — нач. конф., соотв. входу x

$\forall i \in [n^6 - 1]$ K_{i+1} получ. из K_i за $c n^6$ шагов.

$\exists \ldots \forall \ldots Q(x, K_1, \ldots, K_{n^6})$

$L \in \Sigma_2 Time[n^8]$

Лемма 2 $NTime[n] \subseteq DTime[n^{1.2}]$

$\Longrightarrow \Sigma_2 Time[n^8] \subseteq NTime[n^{9.6}]$.

Д-во $L \in \Sigma_2 Time[n^8]$

$\exists$ предикат $P(x, y_1, y_2)$ вычисл. за $O(|x|^\delta)$

$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \in \{0,1\}^{c|x|^\delta}\ \forall y_2 \in \{0,1\}^{c|x|^\delta}\ P(x, y_1, y_2) = 1$

$L' = \{ (x, y_1) \mid y_1 \in \{0,1\}^{c|x|^\delta} \wedge \forall y_2 \in \{0,1\}^{c|x|^\delta}\ P(x, y_1, y_2) = 1 \}$

$L' \in coNTime[n] \subseteq DTime[n^{1.2}]$

$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \in \{0,1\}^{c|x|^\delta} : \underline{(x, y_1) \in L'}$

$L \in NTime[n^{9.6}]$

§ Схемная сложность

$Size[t(n)]$

$P/poly = \bigcup_{c>0} Size[n^c]$

$P/poly \ni \{ 1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\boxed{P \subseteq P/poly}$

$NP \nsubseteq P/poly$

$\underbrace{3^{4}/_{86}}_{\vee, \wedge, \neg}$??

<u>Теорема</u> (Карп, Липтон)

$\boxed{NP \subseteq P/poly} \Rightarrow PH = \Sigma_2^P$

<u>Д-во</u> $NP \subseteq P/poly \Rightarrow \underline{SAT \in P/poly}$

$\Rightarrow \exists$ сем-во схем C_n : $|C_n| \le r(n)$ $\forall \varphi$ — выполнимой

$\varphi(\underbrace{C_{|\varphi|}(\varphi)}) = 1$

$\Sigma_2\text{-}SAT \in \Pi_2^P \Rightarrow \Sigma_2^P = \Pi_2^P = PH$

Пок-м: $\Pi_2\text{-}SAT \in \Sigma_2^P$

$\psi = \underbrace{\forall x \in \{0,1\}^n}\ \underbrace{\exists y \in \{0,1\}^n}\ \varphi(x, y)$

ψ - ист. $\Leftrightarrow \exists C_1, C_2, \ldots, C_{|\psi|} \in \{0,1\}^{r(|\psi|)}\ \forall a \in \{0,1\}^{|\psi|}$

$\varphi(a, C_{|\varphi|}(\varphi[x \leftarrow a])) = 1$

Теорема $\exists C \, \forall n \, \exists$ булева функция $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, кот. не вычисляется никакой схемой размера $\leq 2^n / c \cdot n$

Д-во Число булевых функций 2^{2^n}

$\vee, \wedge, \neg$

Число схем размера $\leq S$

Верш: операция $O(1)$ бит.

номера вх. верш. $O(\log S)$.

$O(S \log S)$ битов. $c_1 \cdot S \cdot \log S$

Число схем размера $\leq S \leq 2^{c_1 \cdot S \cdot \log S}$

$$2^{c_1 \frac{2^n}{cn} \log\left(\frac{2^n}{cn}\right)} \leq 2^{c_1 \frac{2^n}{cn} n} = 2^{\frac{2^n c_1}{c}} <$$

При $c > c_1$ $< 2^{2^n}$

Теорема (Каннан) $\forall k \; PH \notin Size[n^k]$

Д-во

Пробуем задать язык, кот. опр. первой ф-цией, кот. имеет схемную сл-ть $\geq n^k$

зав. от $(n^k)\log n$ первых битов схема

$x \in L \Leftrightarrow \forall f \, (\forall C: (|C| \leq n^k \; \exists y \in \{0,1\}^n: C(x) \neq f(x)) \wedge \forall g \, ((g \leq f) \to \exists C \; |C| \leq n^k: \forall y \in \{0,1\}^n \; C(y) = g(y))) \to f(x) = 1$

PH

$\exists\ f : \{0,1\}^{\log n \cdot c'} \to \{0,1\}$ $\quad 2^{\log n \cdot c'} = n^{k+1}$

схемн. сл-ть $f \geq_1$ $\quad \dfrac{2^{\log n \cdot c'}}{c \cdot \log n \cdot c'} \geq n^k$

$c' = (k+1)$

$2^{(k+1)\log n} = n^{k+1}$

<u>Сл-ие</u> $\forall k \quad \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P \not\subseteq Size[n^k]$

<u>Д-во</u>

$\exists \quad \underset{\substack{\cup\! \mid \\ NP}}{\Sigma_2^P} \cap \Pi_2^P \subseteq Size[n^k] \subseteq P/poly$

$\Rightarrow$ По теореме Карп–Липтон

$PH = \Sigma_2^P = \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P \subseteq Size[n^k]$

$PH \subseteq Size[n^k]$ – противоречие с теоремой Каннана

$P/poly$ $\quad$ λ_n – посл-ть натуральных чисел.

Машина Тьюринга с λ_n битами неравн. подсказки

a_n – посл-ть строк $|a_n| = \lambda_n$

На входах длины n машине M доступно a_n. $\quad \leftarrow$ неравн. подск.

(M, a_n) $\qquad L \qquad \exists$

$DTime[f(n)]/\alpha(n)$ $\qquad M, a_n \quad |a_n| \le \alpha(n)$

M раб. $O(f(n))$ шагов

M с подск. a_n распозн. язык L

$$P/\alpha(n) = \bigcup_c DTime[n^c]/\alpha(n)$$

<u>Теорема</u>

$$\boxed{P/poly} = \boxed{\bigcup_c P/n^c}$$

<u>Д-во</u>

$$P/poly \subseteq \bigcup_c P/n^c$$

$L \in P/poly$ $\qquad C_n$

$$P/n^c \subseteq P/poly$$

аналог. постр. схемы по М.Т.