Семинар по сложности булевых функций

Лекция 9: Отрицания в схемах

В. Алексеенко

Computer Science клуб при ПОМИ
http://compsciclub.ru

20.11.2011

План лекции

1. Когда NOT гейты бесполезны
2. Теорема Маркова
3. Формулы и NOT гейтов
4. Теорема Фишера

Введение

Введение

Главная трудность в нижних оценках размера схемы над базисом $\{\vee \wedge \neg\}$ – присутствие NOT гейтов.

Введение

Главная трудность в нижних оценках размера схемы над базисом $\{\vee \wedge \neg\}$ – присутствие NOT гейтов.

Можем доказать экспоненциальные нижние оценки для схем без NOT гейтов.

Введение

Главная трудность в нижних оценках размера схемы над базисом $\{\vee \wedge \neg\}$ – присутствие NOT гейтов.

Можем доказать экспоненциальные нижние оценки для схем без NOT гейтов.

Для каких классов функций NOT гейты бесполезны.

Введение

Главная трудность в нижних оценках размера схемы над базисом $\{\vee \wedge \neg\}$ – присутствие NOT гейтов.

Можем доказать экспоненциальные нижние оценки для схем без NOT гейтов.

Для каких классов функций NOT гейты бесполезны.

Каково минимальное число NOT гейтов в схеме, вычисления f.

Введение

Главная трудность в нижних оценках размера схемы над базисом $\{\vee \wedge \neg\}$ – присутствие NOT гейтов.

Можем доказать экспоненциальные нижние оценки для схем без NOT гейтов.

Для каких классов функций NOT гейты бесполезны.

Каково минимальное число NOT гейтов в схеме, вычисления f.

Как сильно можно уменьшить число NOT гейтов в схеме без существенного увеличения её размера

План лекции

1. Когда NOT гейты бесполезны
2. Теорема Маркова
3. Формулы и NOT гейтов
4. Теорема Фишера

K – sline функция

K – sline функция

Определение

Функция f называется K-sline'ой если:

K – sline функция

Определение

Функция f называется K-sline'ой если:

1) $f(x) = 1$ когда $|x| = x_1 + x_2 + \cdots + x_n > k$
   (т. е.возвращает 1 если вектор x содержит строго больше k единиц)

K – sline функция

Определение

Функция f называется K-sline'ой если:

1) $f(x) = 1$ когда $|x| = x_1 + x_2 + \cdots + x_n > k$
   (т. е.возвращает 1 если вектор x содержит строго больше k единиц)
2) $f(x) = 0$ когда $|x| = x_1 + x_2 + \cdots + x_n < k$
   (т. е.возвращает 0 если вектор x содержит строго меньше k единиц)

K – sline функция

Определение

Функция f называется K-sline'ой если:

1) $f(x) = 1$ когда $|x| = x_1 + x_2 + \cdots + x_n > k$
   (т. е.возвращает 1 если вектор x содержит строго больше k единиц)
2) $f(x) = 0$ когда $|x| = x_1 + x_2 + \cdots + x_n < k$
   (т. е.возвращает 0 если вектор x содержит строго меньше k единиц)

K-sline функции монотонны

K – sline функция

K – sline функция

Теорема

Если f является K-sline функцией от n переменных, тогда любая схема де Моргана, вычисляющая f, может быть приведена к монотонной схеме добавлением не более $O(n \cdot log^2(n))$ гейтов.

K – sline функция

Теорема

Если f является K-sline функцией от n переменных, тогда любая схема де Моргана, вычисляющая f, может быть приведена к монотонной схеме добавлением не более $O(n \cdot log^2(n))$ гейтов.

Доказательство

Пусть f - k-sline функция, а F - схема де Моргана вычисляющая f, т. е.

$$f(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$$

K – sline функция

Теорема

Если f является K-sline функцией от n переменных, тогда любая схема де Моргана, вычисляющая f, может быть приведена к монотонной схеме добавлением не более $O(n \cdot log^2(n))$ гейтов.

Доказательство

Пусть f - k-sline функция, а F - схема де Моргана вычисляющая f, т. е.

$$f(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$$

Рассмотрим пороговую функцию $Th_k(x - x_i)$, где

$$(x - x_i) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

K – sline функция

Доказательство

Для векторов, содержащих ровно k единиц ($|x| = x_1 + \cdots + x_n = k$), значение функции $Th_k(x - x_i)$ легко вычислить:

$$Th_k(x - x_i) = \neg x_i$$

K – sline функция

Доказательство

Для векторов, содержащих ровно k единиц ($|x| = x_1 + \cdots + x_n = k$), значение функции $Th_k(x - x_i)$ легко вычислить:

$$Th_k(x - x_i) = \neg x_i$$

Известно, что все n пороговых функций $Th_k(x - x_i), i = 1..n$ можно вычислить монотонной схемой размера $O(n \cdot log^2(n))$(Wegener 1985).

K – sline функция

Доказательство

Для векторов, содержащих ровно k единиц ($|x| = x_1 + \cdots + x_n = k$), значение функции $Th_k(x - x_i)$ легко вычислить:

$$Th_k(x - x_i) = \neg x_i$$

Известно, что все n пороговых функций $Th_k(x - x_i), i = 1..n$ можно вычислить монотонной схемой размера $O(n \cdot log^2(n))$(Wegener 1985). Т.о, если заменить все отрицательные входы в схеме

$$F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$$

на значения пороговых функций $Th_k(x - x_i)$, то получим монотонную схему:

$$F_+(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, \neg Th_k(x - x_1), ..., \neg Th_k(x - x_n))$$

Отрицательные входы как новые переменные

Теорема (Lipton 2010)

Для любой булевой функции f от n переменных справедливо:

$$C(f) \leq C_+(g_f) \leq C(f) + 4n$$

$C(f)$ *—минимальный размер схемы ДеМоргана для вычисления f*
$C_+(g_f)$ *— минимальный размер монотонной схемы для вычисления g_f*

$$g_f(x, y) = f(x) \wedge \alpha(x, y) \vee \beta(x, y)$$

где

$$\alpha(x, y) = \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \vee y_i) \text{ а } \beta(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge y_i)$$

Отрицательные входы как новые переменные

Утверждение

Для любой булевой функции f, функция g_f является монотонной.

Отрицательные входы как новые переменные

Утверждение

Для любой булевой функции f, функция g_f является монотонной.

Доказательство

- От противного.
- Положим, что g_f не монотонна. Тогда существуют вектора a, b такие, что $g_f(a, b) = 1$ и изменение любого бита с 0 на 1 приведёт к $g_f(a, b) = 0$.
- $\beta(a, b) = 0$ (иначе, после $0 \to 1 g_f(a, b) = 1$)
- $g_f = 1 \Rightarrow \alpha(a, b) = 1$
- после $0 \to 1$ $\beta(a, b) = 1$

Отрицательные входы как новые переменные

Утверждение

Для любой булевой функции f справедливо:

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

Отрицательные входы как новые переменные

Утверждение

Для любой булевой функции f справедливо:

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

Доказательство

Обозначив $y = (\neg x_1, ..., \neg x_n)$, получим, что $\alpha(x, y) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} (x_i \vee \neg x_i) = 1$,

а $\beta(x, y) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} (x_i \wedge \neg x_i) = 0$

Откуда:

$$g_f = f \wedge 1 \vee 0 = f$$

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

1) Неравенство $C(f) \leq C_+(g_f)$ следует из

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

1) Неравенство $C(f) \leq C_+(g_f)$ следует из

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

2) Пусть $f = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$, размера L.

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

1) Неравенство $C(f) \leq C_+(g_f)$ следует из

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

2) Пусть $f = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$, размера L.

- Заменим $(\neg x_1, ..., \neg x_n) = (y_1, ..., y_n)$

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

1) Неравенство $C(f) \leq C_+(g_f)$ следует из

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

2) Пусть $f = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$, размера L.

- Заменим $(\neg x_1, ..., \neg x_n) = (y_1, ..., y_n)$
- $F+ = \wedge\alpha(x, y)$

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

1) Неравенство $C(f) \leq C_+(g_f)$ следует из

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

2) Пусть $f = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$, размера L.

- Заменим $(\neg x_1, ..., \neg x_n) = (y_1, ..., y_n)$
- $F+ = \wedge\alpha(x, y)$
- $F+ = \vee\beta(x, y)$

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

1) Неравенство $C(f) \leq C_+(g_f)$ следует из

$$g_f(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

2) Пусть $f = F(x_1, ..., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n)$, размера L.

- Заменим $(\neg x_1, ..., \neg x_n) = (y_1, ..., y_n)$
- $F+ = \wedge\alpha(x, y)$
- $F+ = \vee\beta(x, y)$
- В итоге получим схему:

$$F'(x, y) = F(x, y) \wedge \alpha(x, y) \vee \beta(x, y)$$

размер которой - $L + 4n$.

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

- Покажем что $F'(x, y) = g_f(x, y)$.

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

- Покажем что $F'(x, y) = g_f(x, y)$.
- От обратного. Допустим что F' отличается от g_f на некоторых значениях входных векторов a, b.

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

- Покажем что $F'(x, y) = g_f(x, y)$.
- От обратного. Допустим что F' отличается от g_f на некоторых значениях входных векторов a, b.
- $\beta(a, b) = 0$ (else $F'(x, y) = 1 = g_f(a, b)$)

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

- Покажем что $F'(x, y) = g_f(x, y)$.
- От обратного. Допустим что F' отличается от g_f на некоторых значениях входных векторов a, b.
- $\beta(a, b) = 0$ (else $F'(x, y) = 1 = g_f(a, b)$)
- $\alpha(a, b) = 1$ (else значение $F'(x, y) = g_f(a, b)$)

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

- Покажем что $F'(x, y) = g_f(x, y)$.
- От обратного. Допустим что F' отличается от g_f на некоторых значениях входных векторов a, b.
- $\beta(a, b) = 0$ (else $F'(x, y) = 1 = g_f(a, b)$)
- $\alpha(a, b) = 1$ (else значение $F'(x, y) = g_f(a, b)$)
- Из этих условий следует, что $x_k = \neg y_k$

Отрицательные входы как новые переменные

Доказательство

- Покажем что $F'(x, y) = g_f(x, y)$.
- От обратного. Допустим что F' отличается от g_f на некоторых значениях входных векторов a, b.
- $\beta(a, b) = 0$ (else $F'(x, y) = 1 = g_f(a, b)$)
- $\alpha(a, b) = 1$ (else значение $F'(x, y) = g_f(a, b)$)
- Из этих условий следует, что $x_k = \neg y_k$
- $$f(x) = F(x_1, ...x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = F'(x, y)$$

$$f(x) = g_f(x_1, ...x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n) = g_f(x, y) \text{ утв. } 10.3$$

План лекции

Теорема Маркова

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (0;1;1) < (1;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (0;1;1) < (1;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (0;1;1) < (1;1;1)$; false

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (0;1;1) < (1;1;1)$; false
- $(1;0;1) < (1;0;1) < (0;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (0;1;1) < (1;1;1)$; false
- $(1;0;1) < (1;0;1) < (0;1;1)$;

Теорема Маркова

1. Рассматриваются схемы над базисом $\wedge, \vee, \neg$ (не только схемы де Моргана).

Определение

Инверсионной сложностью $I(f)$ булевой функции f называют минимальное число NOT гейтов в любой схеме вычисляющей f

Определение

Цепью — увеличивающаяся последовательность $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ векторов в $\{0,1\}^n$

Примеры

- $(0;0;0) < (0;1;0) < (0;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (1;1;0) < (1;1;1)$; true
- $(1;0;0) < (0;1;1) < (1;1;1)$; false
- $(1;0;1) < (1;0;1) < (0;1;1)$; false

Теорема Маркова

Определение

Будем говорить что i является позицией перехода вниз (jump -down position) функции f на цепи $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ если $f(y^i) = 1$, а $f(y^{i+1}) = 0$

Теорема Маркова

Определение

Будем говорить что i является позицией перехода вниз (jump -down position) функции f на цепи $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ если $f(y^i) = 1$, а $f(y^{i+1}) = 0$

Пример

$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\} \to f(\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}) = \{0, \underline{1, 0}, 1, \underline{1, 0}\}$;

Теорема Маркова

Определение

Будем говорить что i является позицией перехода вниз (jump -down position) функции f на цепи $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ если $f(y^i) = 1$, а $f(y^{i+1}) = 0$

Пример

$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\} \to f(\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}) = \{0, \underline{1, 0}, 1, \underline{1, 0}\}$;

Определение

Обозначим через $d_Y(f)$ число всех переходных позиций функции f на цепи Y

Теорема Маркова

Определение

Будем говорить что i является позицией перехода вниз (jump -down position) функции f на цепи $Y = \{y^1 < y^2 ... < y^k\}$ если $f(y^i) = 1$, а $f(y^{i+1}) = 0$

Пример

$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\} \to f(\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}) = \{0, \underline{1, 0}, 1, \underline{1, 0}\}$;

Определение

Обозначим через $d_Y(f)$ число всех переходных позиций функции f на цепи Y

Определение

Обозначим через $d(f)$ максимальное число всех переходных позиций функции f на всех цепях Y

Теорема Маркова

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) = 2^{l(f)} - 1$$

Теорема Маркова

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) = 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Доказать $d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$

Теорема Маркова

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) = 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Доказать $d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$
- Доказать $d(f) \geq 2^{l(f)} - 1$

Теорема Маркова

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) = 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Доказать $d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$
- Доказать $d(f) \geq 2^{l(f)} - 1$
- $\Rightarrow d(f) = 2^{l(f)} - 1$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)
- Индукционное предположение:

$$d(g) \leq 2^{l(g)} - 1$$

содержит все булевы функции, для которых $l(g) \leq l(f) - 1$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)
- Индукционное предположение:

$$d(g) \leq 2^{l(g)} - 1$$

содержит все булевы функции, для которых $l(g) \leq l(f) - 1$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)
- Индукционное предположение:

$$d(g) \leq 2^{l(g)} - 1$$

  содержит все булевы функции, для которых $l(g) \leq l(f) - 1$
- В любой схеме есть NOT гейт чей вход не зависит от значения другого NOT гейта.

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)
- Индукционное предположение:

$$d(g) \leq 2^{l(g)} - 1$$

  содержит все булевы функции, для которых $l(g) \leq l(f) - 1$
- В любой схеме есть NOT гейт чей вход не зависит от значения другого NOT гейта.

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \leq 2^{l(f)} - 1$$

Доказательство

- Индукция по $l(f)$
- База индукции $l(f) = 0$ (иначе $\Rightarrow f$ – монотонна $\Rightarrow d(f) = 0$)
- Индукционное предположение:

$$d(g) \leq 2^{l(g)} - 1$$

  содержит все булевы функции, для которых $l(g) \leq l(f) - 1$
- В любой схеме есть NOT гейт чей вход не зависит от значения другого NOT гейта.
- $\Rightarrow f = g(\neg h(x), x)$ где $l(g) = l(f) - 1$ и $l(h) = 0$

Теорема Маркова

Доказательство

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$
- $l(g_i) \leqslant l(g) \leqslant l(f) - 1 \Rightarrow$ по гипотизе индукции $d_X(g_i) \leqslant 2^{l(g_i)} - 1 \;\forall$ цепи X

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$
- $l(g_i) \leqslant l(g) \leqslant l(f) - 1 \Rightarrow$ по гипотизе индукции $d_X(g_i) \leqslant 2^{l(g_i)} - 1 \;\forall$ цепи X

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$
- $l(g_i) \leqslant l(g) \leqslant l(f) - 1 \Rightarrow$ по гипотизе индукции $d_X(g_i) \leqslant 2^{l(g_i)} - 1 \;\forall$ цепи X
- В том числе и для цепей Y_0, Y_1:

$$d_{Y_0}(f) = d_{Y_0}(g_0) \leq 2^{l(g_0)} - 1 \leq 2^{l(f)-1} - 1$$
$$d_{Y_1}(f) = d_{Y_1}(g_1) \leq 2^{l(g_1)} - 1 \leq 2^{l(f)-1} - 1$$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \leq l \leq k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$
- $l(g_i) \leqslant l(g) \leqslant l(f) - 1 \Rightarrow$ по гипотизе индукции $d_X(g_i) \leqslant 2^{l(g_i)} - 1 \;\forall$ цепи X
- В том числе и для цепей Y_0, Y_1:

$$d_{Y_0}(f) = d_{Y_0}(g_0) \leq 2^{l(g_0)} - 1 \leq 2^{l(f)-1} - 1$$
$$d_{Y_1}(f) = d_{Y_1}(g_1) \leq 2^{l(g_1)} - 1 \leq 2^{l(f)-1} - 1$$

Теорема Маркова

Доказательство

- Фиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Т.к $l(h) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, 1 \le l \le k \;:\; h = 0 \;\forall\; Y = \{y^1 < .. < y^l\}, h = 1 \;\forall\; Y_1 = Y \setminus Y_0$
- Пусть $g_i := g(\neg i, x), i = 0, 1$
- $l(g_i) \leqslant l(g) \leqslant l(f) - 1 \Rightarrow$ по гипотизе индукции $d_X(g_i) \leqslant 2^{l(g_i)} - 1 \;\forall$ цепи X
- В том числе и для цепей Y_0, Y_1:

$$d_{Y_0}(f) = d_{Y_0}(g_0) \le 2^{l(g_0)} - 1 \le 2^{l(f)-1} - 1$$
$$d_{Y_1}(f) = d_{Y_1}(g_1) \le 2^{l(g_1)} - 1 \le 2^{l(f)-1} - 1$$

- $$d(f) = d_Y(f) \le d_{Y_0}(f) + d_{Y_1}(f) + 1 \le 2^{l(f)-1}$$

Теорема Маркова

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$d(f) \geq 2^{l(f)} - 1$$

План лекции

Формулы и NOT гейтов

Формулы и NOT гейтов

Определение

Формула - схема, соответствующий граф которой является деревом.

Формулы и NOT гейтов

Определение

Формула - схема, соответствующий граф которой является деревом.

Определение

Инверсионной сложностью $I_F(f)$ булевой функции f в классе формул называют минимальное число NOT гейтов входящих в формулу для f

Формулы и NOT гейтов

Определение

Формула - схема, соответствующий граф которой является деревом.

Определение

Инверсионной сложностью $I_F(f)$ булевой функции f в классе формул называют минимальное число NOT гейтов входящих в формулу для f

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$I_F(f) = d(f)$$

Формулы и NOT гейтов

Определение

Формула - схема, соответствующий граф которой является деревом.

Определение

Инверсионной сложностью $I_F(f)$ булевой функции f в классе формул называют минимальное число NOT гейтов входящих в формулу для f

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$I_F(f) = d(f)$$

Доказательство

$I_F(f) \geq d(f)$ +

Формулы и NOT гейтов

Определение

Формула - схема, соответствующий граф которой является деревом.

Определение

Инверсионной сложностью $I_F(f)$ булевой функции f в классе формул называют минимальное число NOT гейтов входящих в формулу для f

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$I_F(f) = d(f)$$

Доказательство

$I_F(f) \geq d(f) \ + \ \ I_F(f) \leq d(f)$

Формулы и NOT гейтов

Определение

Формула - схема, соответствующий граф которой является деревом.

Определение

Инверсионной сложностью $I_F(f)$ булевой функции f в классе формул называют минимальное число NOT гейтов входящих в формулу для f

Теорема

Для любой булевой функции f справедливо:

$$I_F(f) = d(f)$$

Доказательство

$I_F(f) \geq d(f) \ + \ \ I_F(f) \leq d(f) \Rightarrow d(f) = 2^{I(f)} - 1$

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

- Пусть C – формула для f.

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

- Пусть C – формула для f.
- Зафиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

- Пусть C – формула для f.
- Зафиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Хотим показать - $d_Y(f) \leq l_F(C)$

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

- Пусть C – формула для f.
- Зафиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Хотим показать - $d_Y(f) \leq l_F(C)$
  1) $d_Y(f \wedge g) \leq d_Y(f) + d_Y(g)$

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

- Пусть C – формула для f.
- Зафиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Хотим показать - $d_Y(f) \leq l_F(C)$
  1) $d_Y(f \wedge g) \leq d_Y(f) + d_Y(g)$
  2) $d_Y(f \vee g) \leq d_Y(f) + d_Y(g)$

Формулы и NOT гейт

Лемма

Для любой булевой функции f справедливо:

$$l_F(f) \geq d(f)$$

Доказательство

- Пусть C – формула для f.
- Зафиксируем цепь $Y = \{y^1 < ... < y^k\}$ для которой $d_Y(f) = d(f)$
- Хотим показать - $d_Y(f) \leq l_F(C)$
  1) $d_Y(f \wedge g) \leq d_Y(f) + d_Y(g)$
  2) $d_Y(f \vee g) \leq d_Y(f) + d_Y(g)$
  3) $d_Y(\neg f) \leq d_Y(f) + 1$

План лекции

Теорема Фишера

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Доказательство

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Доказательство

- Любую схему размера t можно свести к схеме де Моргана размера $2t$

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Доказательство

- Любую схему размера t можно свести к схеме де Моргана размера $2t$

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Доказательство

- Любую схему размера t можно свести к схеме де Моргана размера $2t$
- Достаточно показать как вычислить функцию

$$INV_n(x_1, ..., x_n) = (\neg x_1, ..., \neg x_n)$$

схемой $O(n^2 log^2(n))$ используя $M(n) = \lceil log(n+1) \rceil$ отрицаний.

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Доказательство

- Любую схему размера t можно свести к схеме де Моргана размера $2t$
- Достаточно показать как вычислить функцию

$$INV_n(x_1, ..., x_n) = (\neg x_1, ..., \neg x_n)$$

схемой $O(n^2 log^2(n))$ используя $M(n) = \lceil log(n+1) \rceil$ отрицаний.

Теорема Фишера

Теорема

Если функция от n переменных может быть вычислена схемой над базисом $\{\vee, \wedge, \neg\}$ размером t, тогда она может быть вычислена схемой, размер которой не более чем $2t + O(n^2 log^2 n)$ используя не более чем $\lceil log(n+1) \rceil$ NOT гейтов.

Доказательство

- Любую схему размера t можно свести к схеме де Моргана размера $2t$
- Достаточно показать как вычислить функцию

$$INV_n(x_1, ..., x_n) = (\neg x_1, ..., \neg x_n)$$

  схемой $O(n^2 log^2(n))$ используя $M(n) = \lceil log(n+1) \rceil$ отрицаний.
- Для векторов, содержащих ровно k единиц, отрицание i-го бита - $\neg x_i$ можно заменить пороговой функцией

Формулы и NOT гейты

Доказательство

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Для остальных векторов вычисление $\neg x_i$ ведётся по формуле:

$$f_i(x) = \bigvee_{k=1}^{n} (\neg Th_k(x) \vee Th_k(x - x_i))$$

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Для остальных векторов вычисление $\neg x_i$ ведётся по формуле:

$$f_i(x) = \bigvee_{k=1}^{n} (\neg Th_k(x) \vee Th_k(x - x_i))$$

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Для остальных векторов вычисление $\neg x_i$ ведётся по формуле:

$$f_i(x) = \bigvee_{k=1}^{n} (\neg Th_k(x) \vee Th_k(x - x_i))$$

- Известно что все функции $Th_k(x)$ и $Th_k(x - x_i)$ можно вычислить монотонной схемой с размером $O(n^2 log^2(n))$

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Для остальных векторов вычисление $\neg x_i$ ведётся по формуле:

$$f_i(x) = \bigvee_{k=1}^{n} (\neg Th_k(x) \vee Th_k(x - x_i))$$

- Известно что все функции $Th_k(x)$ и $Th_k(x - x_i)$ можно вычислить монотонной схемой с размером $O(n^2 log^2(n))$

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Для остальных векторов вычисление $\neg x_i$ ведётся по формуле:

$$f_i(x) = \bigvee_{k=1}^{n} (\neg Th_k(x) \vee Th_k(x - x_i))$$

- Известно что все функции $Th_k(x)$ и $Th_k(x - x_i)$ можно вычислить монотонной схемой с размером $O(n^2 log^2(n))$
- Остаётся вычислить функцию:

$$\neg T(x) = (\neg Th_1(x), ..., \neg Th_n(x))$$

используя не более $\lceil log(n+1) \rceil$ отрицаний.

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Сперва возьмём схему $C_1(x)$ которая вычисляет:

$$T(x) = (Th_1(x), ..., Th_n(x))$$

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Сперва возьмём схему $C_1(x)$ которая вычисляет:

$$T(x) = (Th_1(x), ..., Th_n(x))$$

- Полученный вектор от функции $T(x)$ входит в множество

$$A_{sort} = \{1^i 0^{n-i}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Сперва возьмём схему $C_1(x)$ которая вычисляет:

$$T(x) = (Th_1(x), ..., Th_n(x))$$

- Полученный вектор от функции $T(x)$ входит в множество

$$A_{sort} = \{1^i 0^{n-i}, i = 1, 2, ..., n\}$$

- Используя только $M(n)$ отрицаний можно построить схему $C_2(y)$ размера $O(n)$, которая вычисляет функцию $INV_n(y)$ для всех векторов из A_{sort}

Формулы и NOT гейты

Доказательство

- Сперва возьмём схему $C_1(x)$ которая вычисляет:

$$T(x) = (Th_1(x), ..., Th_n(x))$$

- Полученный вектор от функции $T(x)$ входит в множество

$$A_{sort} = \{1^i 0^{n-i}, i = 1, 2, ..., n\}$$

- Используя только $M(n)$ отрицаний можно построить схему $C_2(y)$ размера $O(n)$, которая вычисляет функцию $INV_n(y)$ для всех векторов из A_{sort}
- Т.о схема $C(x) = C_2(C_1(x)) = \neg T(x)$

Спасибо за внимание!