# Лекция 2: Периодичность и взаимодействие периодов

А. М. Шур

Институт математики и компьютерных наук (матмех) УрФУ

18 марта 2015 г.

# Взаимодействие периодов

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\mathrm{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

# Взаимодействие периодов

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

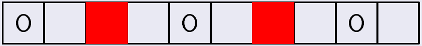
Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\mathrm{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:



# Взаимодействие периодов

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p,q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| о | й | о | | о | | о | | о | |

# Взаимодействие периодов

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| О | Й | О | | О | Й | О | | О | Й |

# Взаимодействие периодов

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| о | й | о | й | о | й | о | й | о | й |

Тогда у него есть период 2.

# Взаимодействие периодов

Следующее фундаментальное свойство было получено для периодических функций без всякой связи со словами, но основную пользу приносит в комбинаторике слов.

## Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» слова $w$ есть два периода $p$ и $q$, то $\text{НОД}(p, q)$ также является периодом $w$.

## Пример

Пусть у слова длины 10 есть периоды 4 и 6:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| о | й | о | й | о | й | о | й | о | й |

Тогда у него есть период 2.

Мы также говорим, что «периоды $p$ и $q$ взаимодействуют в $w$»

**Замечание о продолжении периода**

Пусть слово $w$ таково, что его префикс $w[1..i]$ и его суффикс $w[j..|w|]$ оба имеют период $p$. Тогда если $|w[j..i]| \geqslant p$, то всё слово $w$ имеет период $p$.

В слове $w$ любые две позиции на расстоянии $p$ либо одновременно принадлежат указанному префиксу, либо — указанному суффиксу. $\square$

### Замечание о продолжении периода

Пусть слово $w$ таково, что его префикс $w[1..i]$ и его суффикс $w[j..|w|]$ оба имеют период $p$. Тогда если $|w[j..i]| \geqslant p$, то всё слово $w$ имеет период $p$.

В слове $w$ любые две позиции на расстоянии $p$ либо одновременно принадлежат указанному префиксу, либо — указанному суффиксу. $\square$

- Значит если для любого слова длины $n$ с периодами $p$ и $q$ выполняется свойство взаимодействия, то это свойство выполняется и для любого слова длины $n+1$ с периодами $p$ и $q$, т.е. следующее определение корректно:

### Определение

Число $L(p,q)$ такое, что

- в любом слова длины $L(p,q)$ периоды $p$ и $q$ взаимодействуют,
- в некотором слове длины $L(p,q)-1$ периоды $p$ и $q$ не взаимодействуют,

называется *длиной взаимодействия* периодов $p$ и $q$.

# Длина взаимодействия

## Замечание о продолжении периода

Пусть слово $w$ таково, что его префикс $w[1..i]$ и его суффикс $w[j..|w|]$ оба имеют период $p$. Тогда если $|w[j..i]| \geqslant p$, то всё слово $w$ имеет период $p$.

В слове $w$ любые две позиции на расстоянии $p$ либо одновременно принадлежат указанному префиксу, либо — указанному суффиксу. □

- Значит если для любого слова длины $n$ с периодами $p$ и $q$ выполняется свойство взаимодействия, то это свойство выполняется и для любого слова длины $n+1$ с периодами $p$ и $q$, т.е. следующее определение корректно:

## Определение

Число $L(p, q)$ такое, что

- в любом слова длины $L(p, q)$ периоды $p$ и $q$ взаимодействуют,
- в некотором слове длины $L(p, q) - 1$ периоды $p$ и $q$ не взаимодействуют,

называется *длиной взаимодействия* периодов $p$ и $q$.

Из примера на предыдущем слайде мы знаем, что $L(6, 4) \leqslant 10$.

# Теорема Файна-Вильфа. Взаимно простые периоды

**Теорема (Файн, Вильф, 1965)**

$L(p,q) = p + q - \text{НОД}(p,q)$.

**Теорема (Файн, Вильф, 1965)**

$L(p,q) = p + q - \text{НОД}(p,q)$.

Рассмотрим случай $\text{НОД}(p,q) = 1$. Б.о.о., $p > q > 1$. Свойство взаимодействия в данном случае состоит в наличии периода 1, т.е. в том, что все буквы слова $w$ одинаковы. По слову $w$ построим обыкновенный граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, \ldots, |w|\}$, а $E$ состоит из всех рёбер вида $(i, i{+}p)$ и вида $(i, i{+}q)$.

## Теорема Файна-Вильфа. Взаимно простые периоды

**Теорема (Файн, Вильф, 1965)**

$L(p,q) = p + q - \text{НОД}(p,q)$.

Рассмотрим случай $\text{НОД}(p,q) = 1$. Б.о.о., $p > q > 1$. Свойство взаимодействия в данном случае состоит в наличии периода 1, т.е. в том, что все буквы слова $w$ одинаковы. По слову $w$ построим обыкновенный граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, \ldots, |w|\}$, а $E$ состоит из всех рёбер вида $(i, i{+}p)$ и вида $(i, i{+}q)$.

- если две вершины в $G$ смежны, в данных позициях $w$ стоят одинаковые буквы;
- значит, во всех позициях $w$ из одной компоненты связности графа $G$ стоят одинаковые буквы;
- значит, свойство взаимодействия выполняется, если $G$ связен, и может нарушаться, если $G$ несвязен.

### Теорема (Файн, Вильф, 1965)

$L(p,q) = p + q - \text{НОД}(p,q)$.

Рассмотрим случай $\text{НОД}(p,q) = 1$. Б.о.о., $p > q > 1$. Свойство взаимодействия в данном случае состоит в наличии периода 1, т.е. в том, что все буквы слова $w$ одинаковы. По слову $w$ построим обыкновенный граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, \ldots, |w|\}$, а $E$ состоит из всех рёбер вида $(i, i{+}p)$ и вида $(i, i{+}q)$.

- если две вершины в $G$ смежны, в данных позициях $w$ стоят одинаковые буквы;
- значит, во всех позициях $w$ из одной компоненты связности графа $G$ стоят одинаковые буквы;
- значит, свойство взаимодействия выполняется, если $G$ связен, и может нарушаться, если $G$ несвязен.

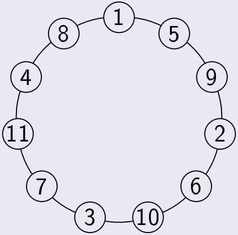
Пусть $|w| = p + q$. Тогда

- все вершины графа $G$ имеют степень 2: если $i$ — вершина, то в каждой паре $\{i{-}q, i{+}p\}$, $\{i{-}p, i{+}q\}$ ровно одно число является вершиной;
- значит, $G$ — объединение простых циклов и содержит $p{+}q$ рёбер.

# Теорема Файна-Вильфа. Взаимно простые периоды (окончание)

## Пример

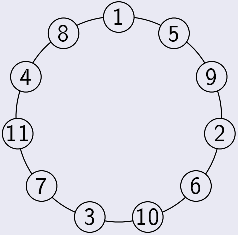
$p = 7,\ q = 4,\ |w| = 11$:




Обойдём цикл, содержащий вершину 1, начиная с ребра $(1, q+1)$.

# Теорема Файна-Вильфа. Взаимно простые периоды (окончание)

## Пример



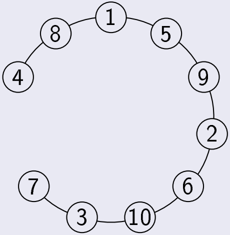

$p = 7$, $q = 4$, $|w| = 11$:

Обойдём цикл, содержащий вершину 1, начиная с ребра $(1, q{+}1)$.

- На каждом шаге из вершины $i$ мы попадаем либо в $i{+}q$, либо в $i{-}p$
- Обойдя цикл, получим $kq - \ell p = 0$, где $k + \ell$ – длина цикла.

В силу взаимной простоты $p$ и $q$ имеем $p \mid k$, $q \mid \ell$, т.е. длина цикла равна $p{+}q$ и он содержит все рёбра графа. Значит, $G$ – простой цикл.

## Пример




$p = 7,\ q = 4,\ |w| = 10$:

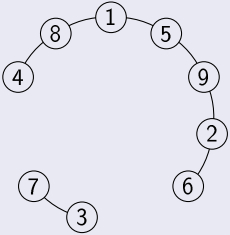
Обойдём цикл, содержащий вершину 1, начиная с ребра $(1, q+1)$.

- На каждом шаге из вершины $i$ мы попадаем либо в $i+q$, либо в $i-p$
- Обойдя цикл, получим $kq - \ell p = 0$, где $k + \ell$ – длина цикла.

В силу взаимной простоты $p$ и $q$ имеем $p \mid k$, $q \mid \ell$, т.е. длина цикла равна $p+q$ и он содержит все рёбра графа. Значит, $G$ – простой цикл. Тогда

- граф слова длины $p+q-1$, полученный из $G$ удалением вершины, связен

## Пример




$p = 7$, $q = 4$, $|w| = 9$:

в слове $w = \mathrm{AAXAAAXAA}$
периоды не взаимодействуют

Обойдём цикл, содержащий вершину 1, начиная с ребра $(1, q{+}1)$.

- На каждом шаге из вершины $i$ мы попадаем либо в $i{+}q$, либо в $i{-}p$
- Обойдя цикл, получим $kq - \ell p = 0$, где $k + \ell$ – длина цикла.

В силу взаимной простоты $p$ и $q$ имеем $p \mid k$, $q \mid \ell$, т.е. длина цикла равна $p{+}q$ и он содержит все рёбра графа. Значит, $G$ – простой цикл. Тогда

- граф слова длины $p{+}q{-}1$, полученный из $G$ удалением вершины, связен
- граф слова длины $p{+}q{-}2$, полученный из $G$ удалением двух несмежных вершин, несвязен

По определению, $L(p, q) = p{+}q{-}1$ для взаимно простых $p$ и $q$, что и требовалось.

Пусть теперь $\mathrm{НОД}(p, q) = d$. Рассмотрим слова

$$\begin{aligned} w_1 &= w[1]w[d+1]w[2d+1]\dots \\ w_2 &= w[2]w[d+2]w[2d+2]\dots \\ &\dots\dots \\ w_d &= w[d]w[2d]w[3d]\dots \end{aligned}$$

Пусть теперь $\text{НОД}(p,q) = d$. Рассмотрим слова

$$
\begin{aligned}
w_1 &= w[1]w[d{+}1]w[2d{+}1]\dots\\
w_2 &= w[2]w[d{+}2]w[2d{+}2]\dots\\
&\dots\dots\\
w_d &= w[d]w[2d]w[3d]\dots
\end{aligned}
$$

Заметим, что

- слово $w$ имеет период $d$ тогда и только тогда, когда каждое из слов $w_i$ имеет период 1,
- слово $w_i$ гарантированно имеет период 1, если $|w_i| \geqslant L(p/d, q/d) = p/d + q/d - 1$.

Отсюда $L(p,q) = p + q - d$, что и требовалось. $\square$

Теорема Файна-Вильфа — результат из разряда тех, которые всем хочется обобщать.

1. Нужно больше периодов!
   - не очень интересное направление: длина взаимодействия становится слабо отличимой от наибольшего из периодов.
2. Обобщенные периоды
   - например, *абелевы*. Слово $w$ имеет абелев период $p$, если $w = w_1 \cdots w_n w'$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где слова $w_1, \ldots, w_n$ имеют длину $p$ и являются анаграммами друг друга, т.е. составлены из одних и тех же букв в одном и том же количестве, а $w'$ — префикс такой анаграммы. Например, слово $\mathrm{AXAAAXAA}$ имеет абелевы периоды 3,4,5,6 и 7, так что с взаимодействием все не так просто.
3. Обобщенные слова
   - например, *частичные*. В частичных словах на некоторых позициях находится «неопределенная» буква (*джокер*) $\diamond$, которая «совместима» с любой буквой. Получается интересно.

## Обобщения свойства взаимодействия

Теорема Файна-Вильфа — результат из разряда тех, которые всем хочется обобщать.

1. Нужно больше периодов!
   - не очень интересное направление: длина взаимодействия становится слабо отличимой от наибольшего из периодов.
2. Обобщенные периоды
   - например, *абелевы*. Слово $w$ имеет абелев период $p$, если $w = w_1 \cdots w_n w'$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где слова $w_1, \ldots, w_n$ имеют длину $p$ и являются анаграммами друг друга, т.е. составлены из одних и тех же букв в одном и том же количестве, а $w'$ — префикс такой анаграммы. Например, слово $\mathrm{AXAAAXAA}$ имеет абелевы периоды 3,4,5,6 и 7, так что с взаимодействием все не так просто.
3. Обобщенные слова
   - например, *частичные*. В частичных словах на некоторых позициях находится «неопределенная» буква (*джокер*) $\diamond$, которая «совместима» с любой буквой. Получается интересно.

Теорема Файна-Вильфа — результат из разряда тех, которые всем хочется обобщать.

1. Нужно больше периодов!
   - не очень интересное направление: длина взаимодействия становится слабо отличимой от наибольшего из периодов.
2. Обобщенные периоды
   - например, *абелевы*. Слово $w$ имеет абелев период $p$, если $w = w_1 \cdots w_n w'$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где слова $w_1, \ldots, w_n$ имеют длину $p$ и являются анаграммами друг друга, т.е. составлены из одних и тех же букв в одном и том же количестве, а $w'$ — префикс такой анаграммы. Например, слово $\mathrm{AXAAAXAA}$ имеет абелевы периоды 3,4,5,6 и 7, так что с взаимодействием все не так просто.
3. Обобщенные слова
   - например, *частичные*. В частичных словах на некоторых позициях находится «неопределенная» буква (*джокер*) $\diamond$, которая «совместима» с любой буквой. Получается интересно.

Частичное слово есть частичная функция $w : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma$ с областью определения $D(w)$. При записи частичного слова как последовательности, в неопределенные позиции подставляется спецсимвол $\diamond$ — джокер (**Пример**: $\diamond$ЕКТОР). Джокер означает

- “здесь стоит буква, неважно какая”
  - например, при поиске в тексте по образцу с «вопросиками», или
- “здесь стоит буква, неизвестно какая”
  - например, при восстановлении поврежденного текста.

Частичное слово есть частичная функция $w : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma$ с областью определения $D(w)$. При записи частичного слова как последовательности, в неопределенные позиции подставляется спецсимвол $\diamond$ — джокер (**Пример**: $\diamond$ЕКТОР). Джокер означает

- "здесь стоит буква, неважно какая"
  - например, при поиске в тексте по образцу с «вопросиками», или
- "здесь стоит буква, неизвестно какая"
  - например, при восстановлении поврежденного текста.

Частичное слово над алфавитом $\Sigma$ удобно рассматривать как слово над $\Sigma \cup \{\diamond\}$, используя обычные понятия длины, подслова, и т. п.

**Определение**

Пусть $w$ — частичное слово. Натуральное число $p \leqslant |w|$ называется

- локальным периодом $w$, если $w[i] = w[i{+}p]$ для всех $i$ таких, что $i, i{+}p \in D(w)$;
- периодом $w$, если $w[i] = w[j]$ для всех $i, j \in D(w)$ таких, что $i \equiv j \pmod{p}$.

# Частичные слова и их периоды

Частичное слово есть частичная функция $w : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma$ с областью определения $D(w)$. При записи частичного слова как последовательности, в неопределенные позиции подставляется спецсимвол $\diamond$ — джокер (**Пример**: $\diamond$EKTOP). Джокер означает

- "здесь стоит буква, неважно какая"
  - например, при поиске в тексте по образцу с «вопросиками», или
- "здесь стоит буква, неизвестно какая"
  - например, при восстановлении поврежденного текста.

Частичное слово над алфавитом $\Sigma$ удобно рассматривать как слово над $\Sigma \cup \{\diamond\}$, используя обычные понятия длины, подслова, и т. п.

## Определение

Пусть $w$ — частичное слово. Натуральное число $p \leqslant |w|$ называется

- локальным периодом $w$, если $w[i] = w[i+p]$ для всех $i$ таких, что $i, i+p \in D(w)$;
- периодом $w$, если $w[i] = w[j]$ для всех $i, j \in D(w)$ таких, что $i \equiv j \pmod p$.

Любой период $w$ является локальным периодом, но не наоборот: так, KO$\diamond$OC имеет локальный период 2, но не имеет периода 2.

- джокер «разрывает» локальные периоды, но «пропускает» периоды

### Свойство взаимодействия периодов

Если у «достаточно длинного» частичного слова $w$ есть два (локальных или глобальных) периода $p$ и $q$, то $\mathrm{НОД}(p,q)$ также является (таким же) периодом $w$.

### Замечание

Свойство взаимодействия локальных периодов в общем случае не выполняется, если частичное слово содержит хотя бы два джокера.

Рассмотрим сколь угодно длинное частичное слово $w$ с локальными периодами $p$ и $q$ и джокерами на позициях $q+1$ и $p+1$. Эти локальные периоды у слова останутся, если заменить букву $w[1]$ на любую другую. Таким образом, можно получить частичное слово, в котором буквы на позициях 1 и $\mathrm{НОД}(p,q)+1$ различны и которое, следовательно, не имеет локального периода $\mathrm{НОД}(p,q)$. $\square$

Значит, свойство взаимодействия разумно рассматривать только для периодов.

**Определение**

Число $L(k, p, q) > k + 1$ называется *длиной взаимодействия* периодов $p$ и $q$ для $k$ джокеров, если

- любое частичное слово длины $L(k, p, q)$ с $k$ джокерами и периодами $p$, $q$ имеет период $\text{НОД}(p, q)$,
- существует частичное слово длины $L(k, p, q) - 1$ с $k$ джокерами и периодами $p$, $q$, но без периода $\text{НОД}(p, q)$.

Оценка длины взаимодействия для произвольных периодов получается из оценки для взаимно простых периодов так же, как и для обычных слов. Для упрощения формул, рассмотрим только случай взаимно простых периодов; б.о.о., $p > q > 1$.

**Теорема (Гамзова, Шур, 2001)**

$L(k, p, q) \leqslant qk + (p + q - 1)$ для любых $k, p$ и $q$, причем если $q = 2$ и $p \mid k$, то имеет место равенство.

# Граф частичного слова

Зафиксируем $p$ и $q$ ($p > q$). По частичному слову $w$ с периодами $p, q$ построим граф $G = (V, E)$, где $V = D(w)$, а $E$ состоит из всех рёбер $(i, j)$ таких, что

- $i = j \pmod{p}$ и всякое $m$, лежащее между $i$ и $j$ и равное им по модулю $p$, не принадлежит $D(w)$, или
- $i = j \pmod{q}$ и всякое $m$, лежащее между $i$ и $j$ и равное им по модулю $q$, не принадлежит $D(w)$.

Если $w$ — обычное слово, то построенный граф совпадает с графом из доказательства теоремы Файна–Вильфа.

## Граф частичного слова

Зафиксируем $p$ и $q$ $(p > q)$. По частичному слову $w$ с периодами $p, q$ построим граф $G = (V, E)$, где $V = D(w)$, а $E$ состоит из всех рёбер $(i, j)$ таких, что

- $i = j \pmod p$ и всякое $m$, лежащее между $i$ и $j$ и равное им по модулю $p$, не принадлежит $D(w)$, или
- $i = j \pmod q$ и всякое $m$, лежащее между $i$ и $j$ и равное им по модулю $q$, не принадлежит $D(w)$.

Если $w$ — обычное слово, то построенный граф совпадает с графом из доказательства теоремы Файна–Вильфа.

### Замечание о связности

Если граф частичного слова $w$ связен, то для $w$ выполнено свойство взаимодействия. Значит, если граф любого частичного слова длины $n$ с $k$ джокерами связен, то $L(k, p, q) \leqslant n$.

## Граф частичного слова

Зафиксируем $p$ и $q$ ($p > q$). По частичному слову $w$ с периодами $p, q$ построим граф $G = (V, E)$, где $V = D(w)$, а $E$ состоит из всех рёбер $(i, j)$ таких, что

- $i = j \pmod p$ и всякое $m$, лежащее между $i$ и $j$ и равное им по модулю $p$, не принадлежит $D(w)$, или
- $i = j \pmod q$ и всякое $m$, лежащее между $i$ и $j$ и равное им по модулю $q$, не принадлежит $D(w)$.

Если $w$ — обычное слово, то построенный граф совпадает с графом из доказательства теоремы Файна–Вильфа.

### Замечание о связности

Если граф частичного слова $w$ связен, то для $w$ выполнено свойство взаимодействия. Значит, если граф любого частичного слова длины $n$ с $k$ джокерами связен, то $L(k, p, q) \leqslant n$.

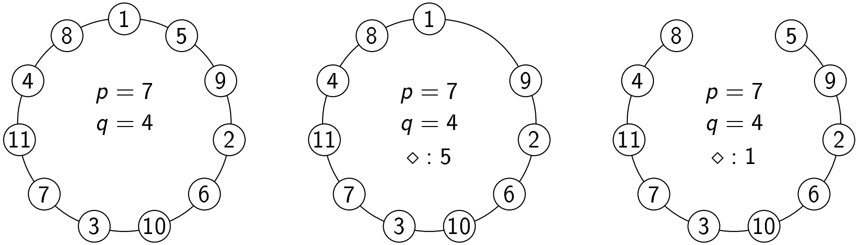
Для доказательства теоремы нужны две леммы.

### Лемма о графе

Если $|w| = p + q$ и $w$ содержит ровно один джокер в позициях $1, \ldots, q, p{+}1, \ldots, p{+}q$ и любое количество джокеров в позициях $q{+}1, \ldots, p$, то граф частичного слова $w$ связен.

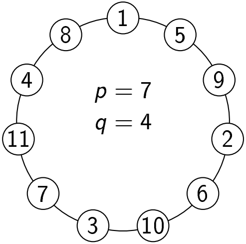
# Доказательство леммы о графе

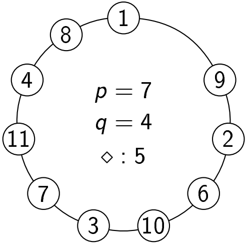
Мы знаем, что граф слова длины $p+q$ является простым циклом (рис. слева). Граф частичного слова той же длины получается «изъятием» из этого цикла вершин на позициях джокеров. Результат «изъятия» вершины $i$ будет таким, как на рисунке в центре, если $i$ смежна с вершинами $i+q$ и $i-q$, и таким, как справа, если $i$ смежна с $i+q$ и $i+p$ либо с $i-q$ и $i-p$.

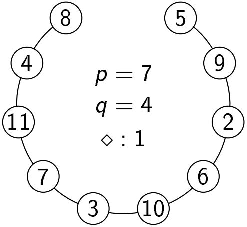


# Доказательство леммы о графе

Мы знаем, что граф слова длины $p+q$ является простым циклом (рис. слева). Граф частичного слова той же длины получается «изъятием» из этого цикла вершин на позициях джокеров. Результат «изъятия» вершины $i$ будет таким, как на рисунке в центре, если $i$ смежна с вершинами $i+q$ и $i-q$, и таким, как справа, если $i$ смежна с $i+q$ и $i+p$ либо с $i-q$ и $i-p$.




Таким образом, если в слове длины $p+q$ разместить произвольное количество джокеров в позициях $q+1, \ldots, p$, то для получившегося частичного слова граф по-прежнему будет простым циклом. Добавление же джокера в одну из позиций $1, \ldots, q, p+1, \ldots, p+q$ приведет к разрыву цикла, но граф, тем не менее, останется связным. □

# Лемма о существенных джокерах

Назовем джокер *существенным* для частичного слова длины $p+q$, если он расположен в его префиксе или суффиксе длины $q$.

## Лемма о существенных джокерах

Если $w$ имеет подслово длины $p+q$ не более чем с одним существенным джокером, то граф частичного слова $w$ связен.

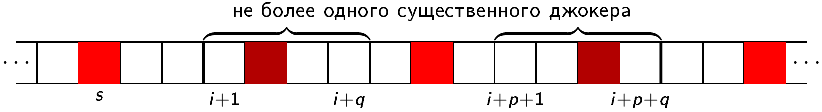
# Лемма о существенных джокерах

Назовем джокер *существенным* для частичного слова длины $p+q$, если он расположен в его префиксе или суффиксе длины $q$.

## Лемма о существенных джокерах

Если $w$ имеет подслово длины $p+q$ не более чем с одним существенным джокером, то граф частичного слова $w$ связен.

Пусть указанное подслово есть $w[i+1..i+p+q]$. По лемме о графе все буквы в этом подслове равны между собой; пусть они равны $a$. Достаточно доказать, что любая буква в $w$ совпадает с $a$. Рассмотрим позицию $s$, занятую буквой и не принадлежащую выбранному подслову; пометим все позиции, равные $s$ по модулю $q$. Тогда одна из позиций $i+1, \ldots, i+q$ и одна из позиций $i+p+1, \ldots, i+p+q$ окажутся помеченными:




По условию, не более чем одна из тёмно-красных позиций содержит джокер; следовательно, одна из них гарантированно содержит букву $a$. Поскольку буквы в помеченных позициях равны, получаем $w(s) = a$. □

# Доказательство теоремы

Оценим максимальную длину частичного слова $w$, удовлетворяющего условиям теоремы и имеющего несвязный граф.

- По лемме о существенных джокерах $w$ содержит $\geqslant 2$ существенных джокеров в каждом подслове длины $p+q$;
- в каждом таком подслове есть $2q$ позиций для существенных джокеров, т.е. каждый джокер может являться существенным не более чем для $2q$ подслов;
- самый левый джокер в $w$ не может занимать последнюю позицию в подслове с двумя существенными джокерами; следовательно, он является существенным лишь для $2q-1$ подслова;
- симметричное соображение верно для самого правого джокера в $w$.

Оценим максимальную длину частичного слова $w$, удовлетворяющего условиям теоремы и имеющего несвязный граф.

- По лемме о существенных джокерах $w$ содержит $\geqslant 2$ существенных джокеров в каждом подслове длины $p+q$;
- в каждом таком подслове есть $2q$ позиций для существенных джокеров, т.е. каждый джокер может являться существенным не более чем для $2q$ подслов;
- самый левый джокер в $w$ не может занимать последнюю позицию в подслове с двумя существенными джокерами; следовательно, он является существенным лишь для $2q-1$ подслова;
- симметричное соображение верно для самого правого джокера в $w$.

Поскольку для каждого подслова длины $p+q$ необходимы два существенных джокера, количество таких подслов в $w$ не превышает $(2qk-2)/2$, т. е. $qk-1$. С другой стороны, слово длины $|w|$ содержит $|w|-p-q+1$ таких подслов. Итак, $|w|-p-q+1 \leqslant qk-1$, откуда $|w| \leqslant qk+(p+q-2)$. Значит, любое слово длины $\geqslant qk+(p+q-1)$ имеет связный граф. С учетом замечания о связности, оценка длины взаимодействия доказана. $\square$

Приведем пример частичного слова, доказывающий неулучшаемость общей оценки. Пусть $q = 2$ и $k = sp$. Рассмотрим частичное слово $w$ длины

$$|w| = qk + (p + q - 2) = (2s + 1)p,$$

состоящее из $p$ букв, за которыми следуют $p$ джокеров, снова $p$ букв, затем $p$ джокеров, и т. д., чередуя подслова из $p$ букв и $p$ джокеров. Потребуем, кроме того, чтобы все буквы, находящиеся в слове $w$ на нечетных позициях, были равны $a$, а на четных — $b$.

$$w = \underbrace{\underbrace{aba\ldots}_{p}\underbrace{\diamond\diamond\ldots\diamond}_{p}\underbrace{aba\ldots}_{p}\ \ldots\ \underbrace{\diamond\diamond\ldots\diamond}_{p}\underbrace{aba\ldots}_{p}}_{(2s+1)\ \text{блоков}}$$

Полученное частичное слово по построению имеет периоды $p$ и 2 и содержит $sp = k$ джокеров, не имея при этом периода 1. Значит, $L(k, p, q) \geqslant qk + (p + q - 1)$ при $q = 2$ и $k = sp$. Теорема полностью доказана. □

# Более точная оценка

Доказанная теорема показывает, что длина взаимодействия периодов частичных слов существует и ограничена сверху линейной функцией от числа джокеров (т.е. прямой с наклоном $q$). Насколько эта оценка хороша асимптотически, т.е. при больших $k$?

# Более точная оценка

Доказанная теорема показывает, что длина взаимодействия периодов частичных слов существует и ограничена сверху линейной функцией от числа джокеров (т.е. прямой с наклоном $q$). Насколько эта оценка хороша асимптотически, т.е. при больших $k$?

- При $q = 2$ можно выписать точную формулу, опираясь на пример с предыдущего слайда
- При $q > 2$ верна более сильная оценка длины взаимодействия: если $k$ не слишком мало по отношению к $p/q$, $L(k, p, q)$ есть сумма линейной (с меньшим чем $q$ наклоном) и периодической функций:

# Более точная оценка

Доказанная теорема показывает, что длина взаимодействия периодов частичных слов существует и ограничена сверху линейной функцией от числа джокеров (т.е. прямой с наклоном $q$). Насколько эта оценка хороша асимптотически, т.е. при больших $k$?

- При $q = 2$ можно выписать точную формулу, опираясь на пример с предыдущего слайда
- При $q > 2$ верна более сильная оценка длины взаимодействия: если $k$ не слишком мало по отношению к $p/q$, $L(k, p, q)$ есть сумма линейной (с меньшим чем $q$ наклоном) и периодической функций:

**Теорема (Гамзова, Шур, 2003)**

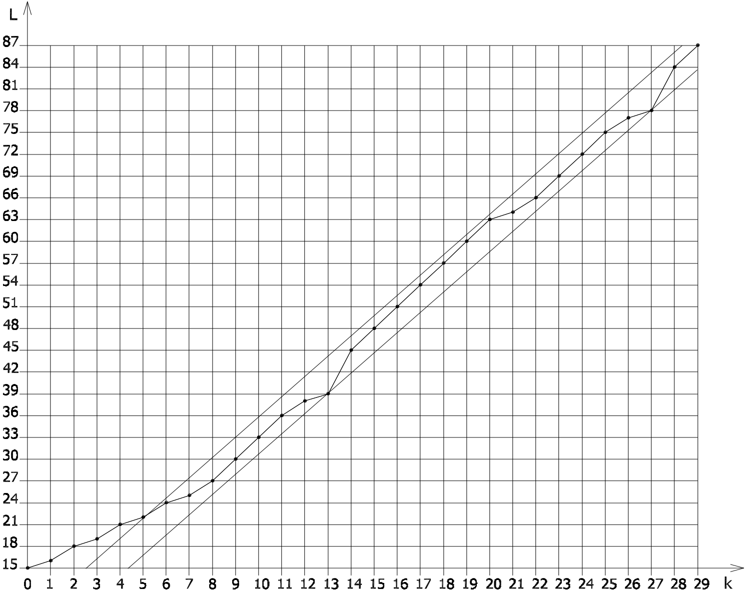
Пусть $p > q > 2$, $k \geqslant \lfloor 2p/3 \rfloor - 1$ при $q = 3$ и $k \geqslant \lfloor 3p/q \rfloor + 3$ при $q \geqslant 4$. Тогда

$$L(k, p, q) = \frac{pqk}{p + q - 2} + \Delta(k, p, q),$$

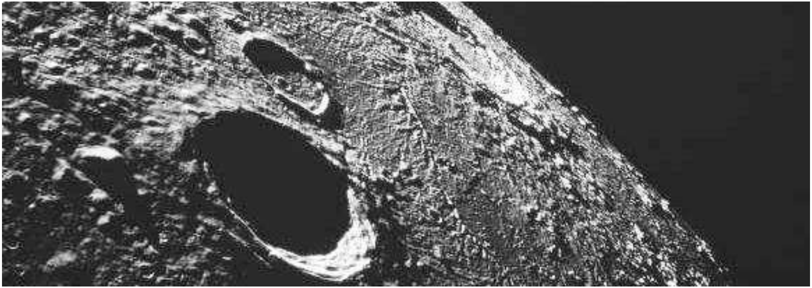
где $\Delta(k, p, q)$ — периодическая по $k$ функция с периодом $p+q-2$ такая, что

- $2q \leqslant \max(\Delta(k, p, q)) < 4(q - 1)$, причем обе границы неулучшаемы;
- $\min(\Delta(k, p, q)) = \frac{pq}{p+q-2}$.

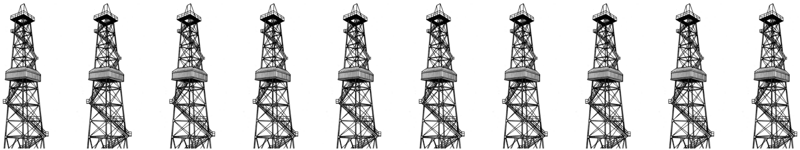
# Реальное поведение длины взаимодействия при $p = 13$, $q = 3$

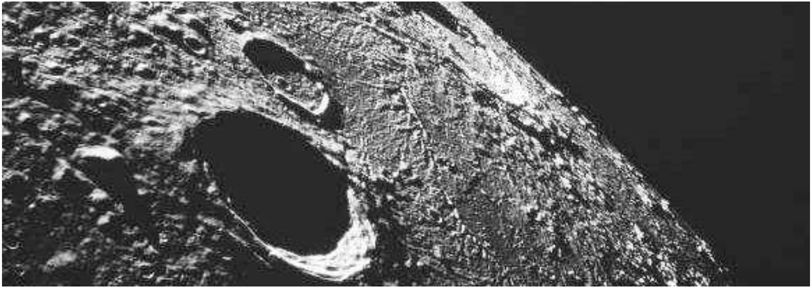


# Игрушечная модель: сервисный робот

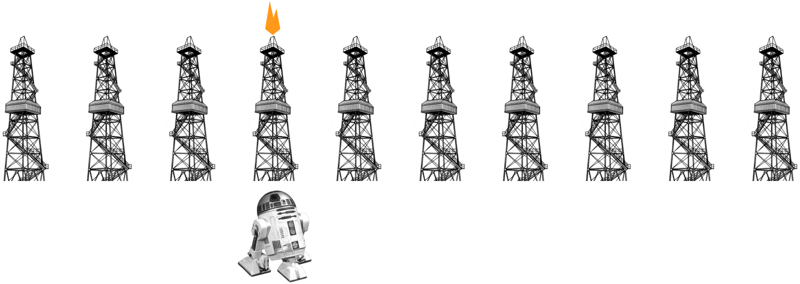


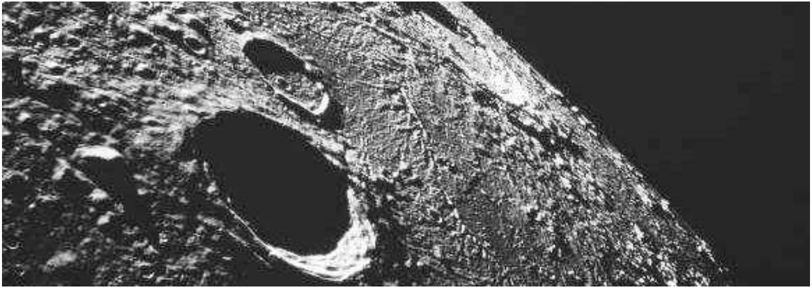
# Игрушечная модель: сервисный робот



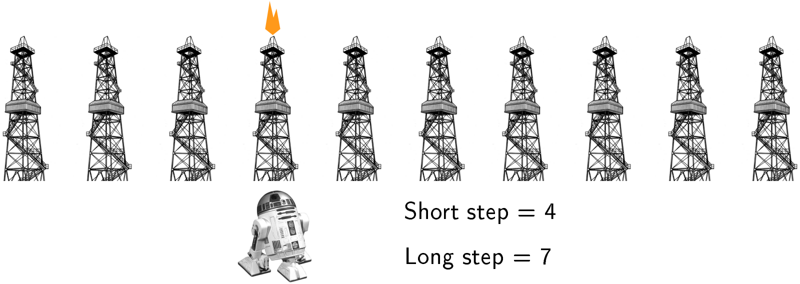


# Игрушечная модель: сервисный робот



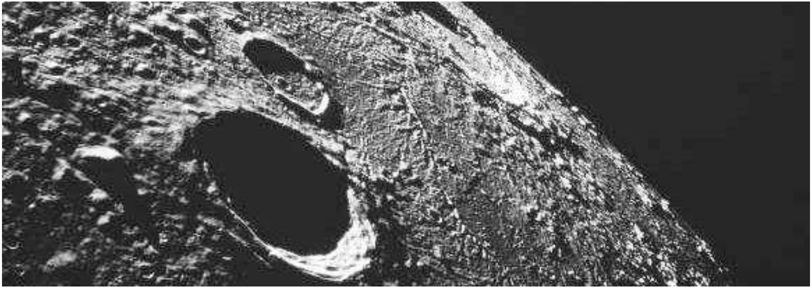


# Игрушечная модель: сервисный робот

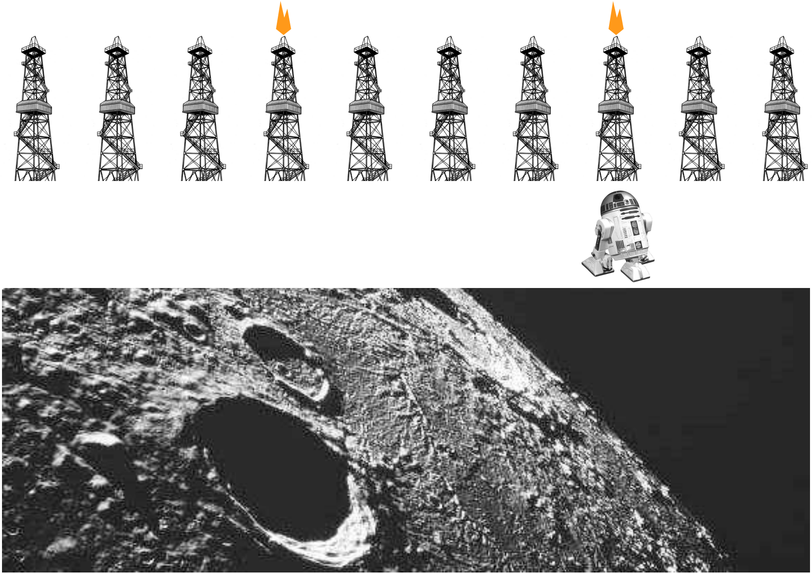


Short step = 4

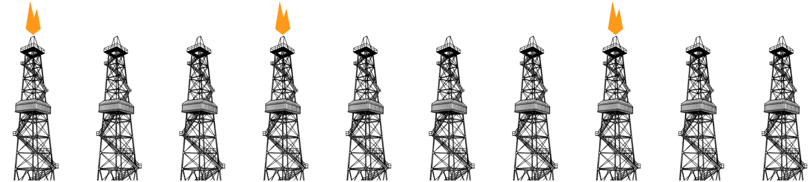
Long step = 7

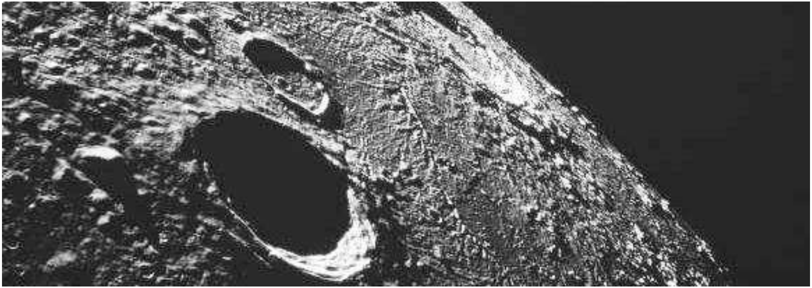


# Игрушечная модель: сервисный робот

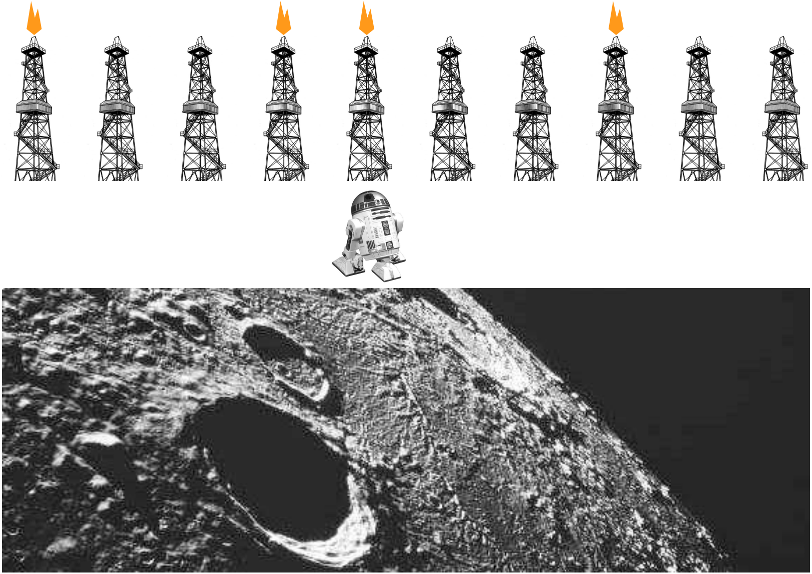


# Игрушечная модель: сервисный робот

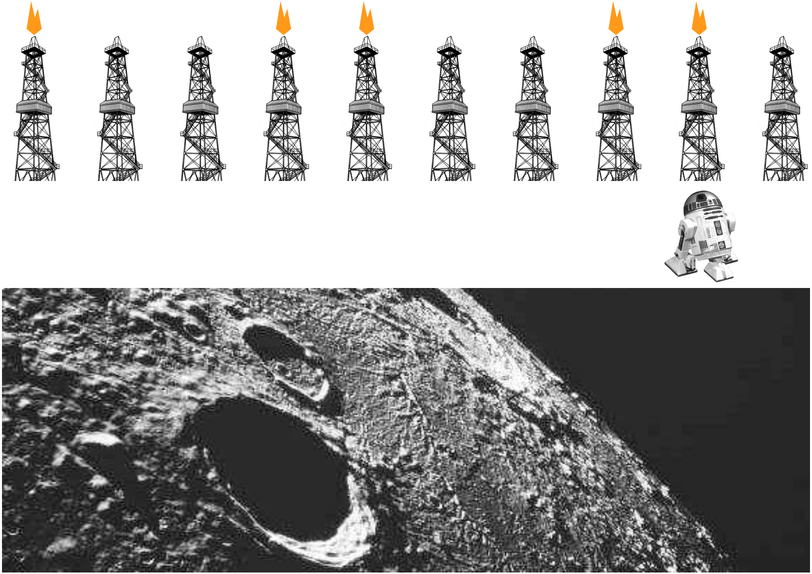




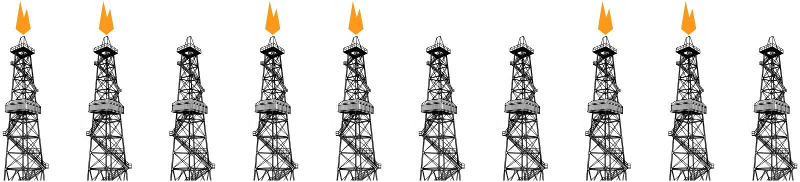
# Игрушечная модель: сервисный робот

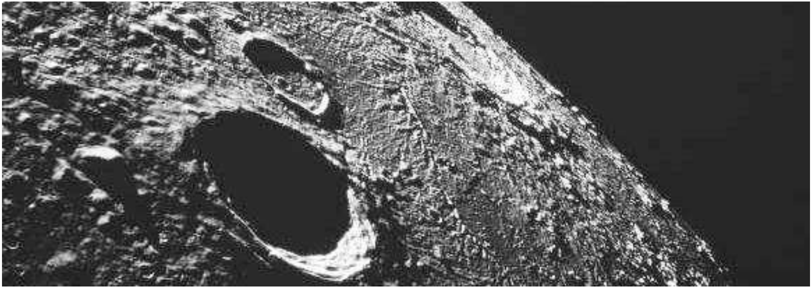


# Игрушечная модель: сервисный робот

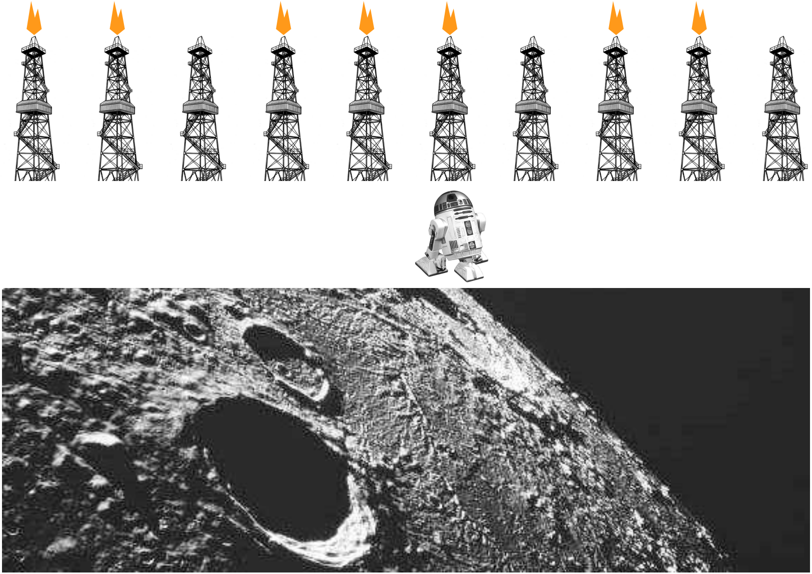


# Игрушечная модель: сервисный робот

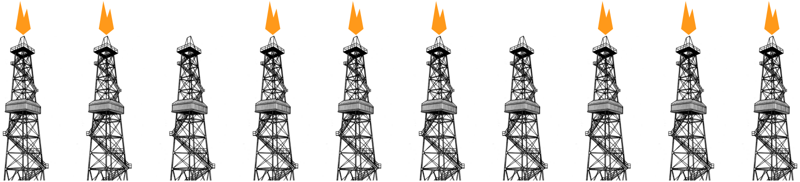


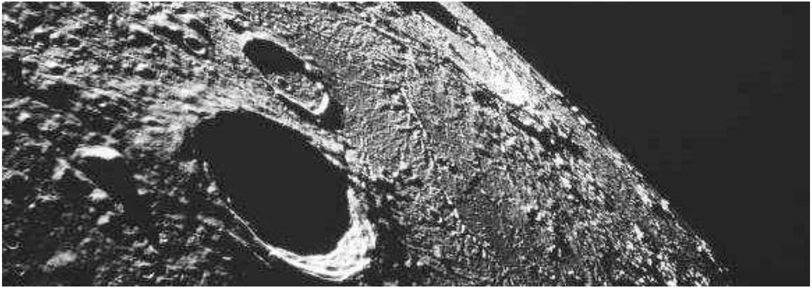


# Игрушечная модель: сервисный робот

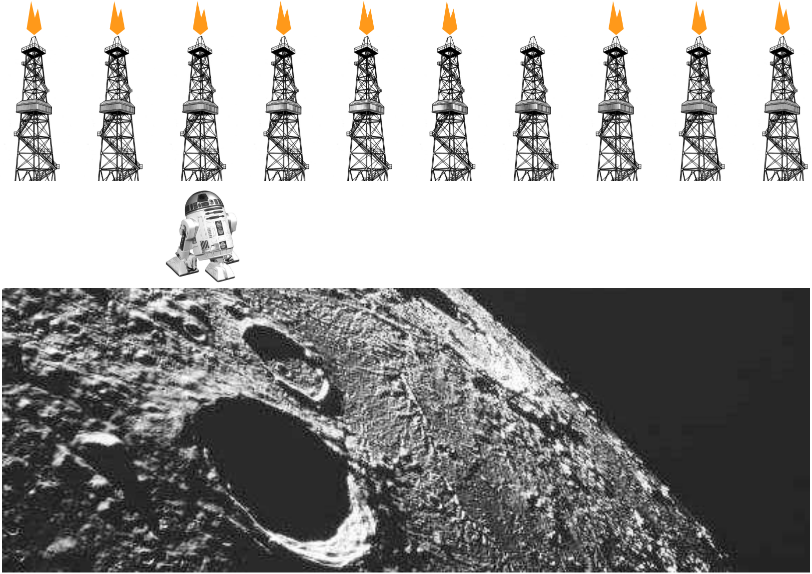


# Игрушечная модель: сервисный робот

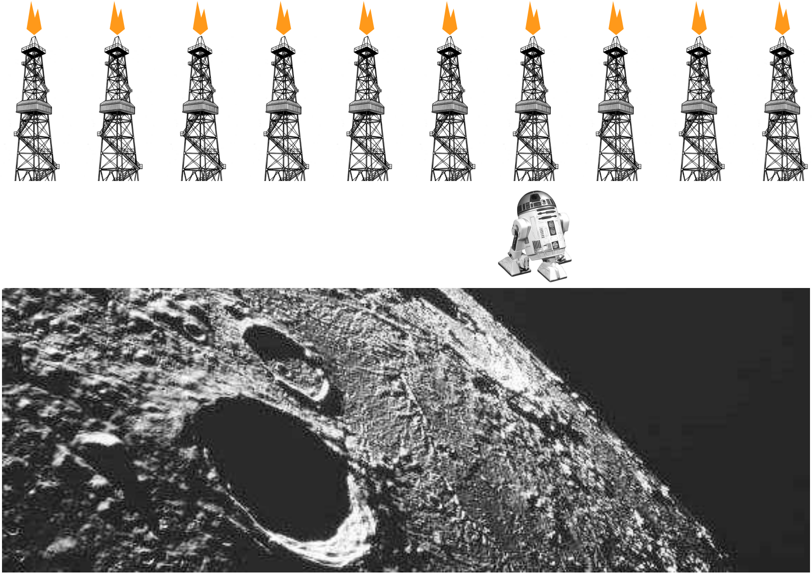




# Игрушечная модель: сервисный робот



# Игрушечная модель: сервисный робот



## Математика игрушечной модели

- Даны три натуральных числа: число $L$ обслуживаемых машин, длинный ($p$) и короткий ($q$) шаги робота
  - $L > p > q > 1$, $\gcd(p, q) = 1$
- Построено отношение эквивалентности на $\{1, \ldots, L\}$, порожденное всеми парами чисел с разностью $p$ или $q$
- Вопрос: совпадает ли отношение с $L^2$?

# Математика игрушечной модели

- Даны три натуральных числа: число $L$ обслуживаемых машин, длинный ($p$) и короткий ($q$) шаги робота
  - $L > p > q > 1$, $\gcd(p, q) = 1$
- Построено отношение эквивалентности на $\{1, \ldots, L\}$, порожденное всеми парами чисел с разностью $p$ или $q$
- Вопрос: совпадает ли отношение с $L^2$?

Если назвать классы эквивалентности «буквами», то

- дано слово длины $L$ с взаимно простыми периодами $p$ и $q$
- спрашивается, обязано ли это слово иметь период 1 (т.е. быть унарным).

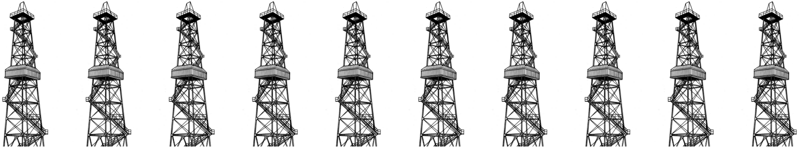
- Даны три натуральных числа: число $L$ обслуживаемых машин, длинный ($p$) и короткий ($q$) шаги робота
  - $L > p > q > 1$, $\gcd(p, q) = 1$
- Построено отношение эквивалентности на $\{1, \ldots, L\}$, порожденное всеми парами чисел с разностью $p$ или $q$
- Вопрос: совпадает ли отношение с $L^2$?

Если назвать классы эквивалентности «буквами», то

- дано слово длины $L$ с взаимно простыми периодами $p$ и $q$
- спрашивается, обязано ли это слово иметь период 1 (т.е. быть унарным).

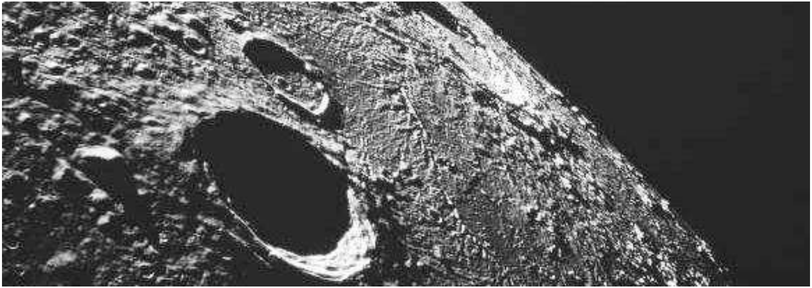
Ответ дает в точности теорема Файна–Вильфа.

# Игрушечная модель-2

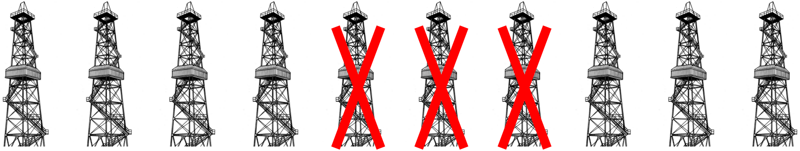


Short step $= 4$

Long step $= 7$



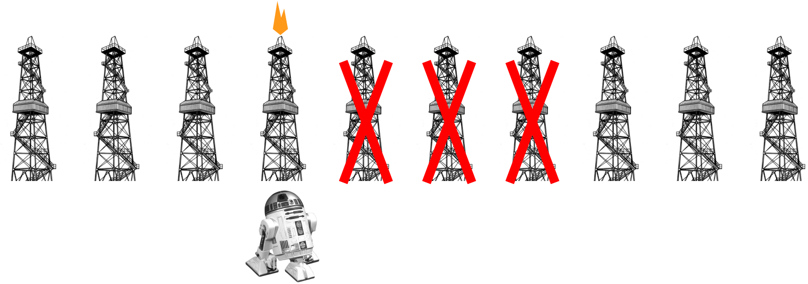
# Игрушечная модель-2



Short step $= 4$

Long step $= 7$

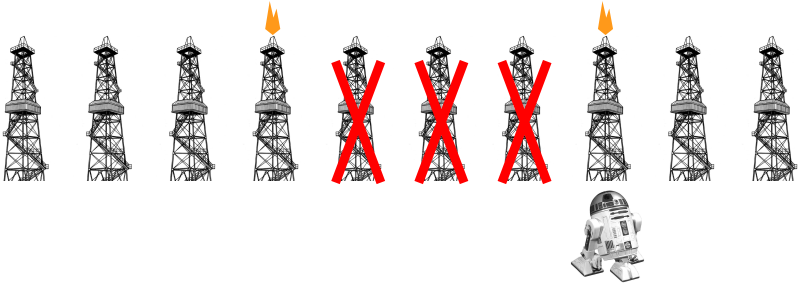
# Игрушечная модель-2

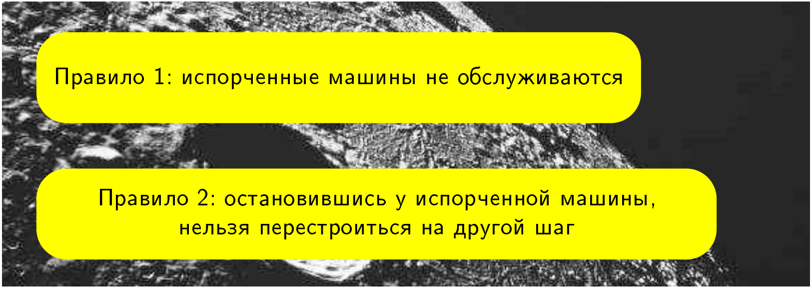


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Игрушечная модель-2

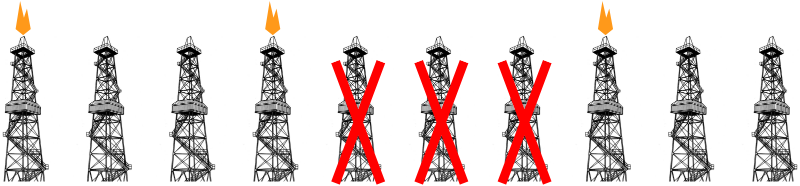


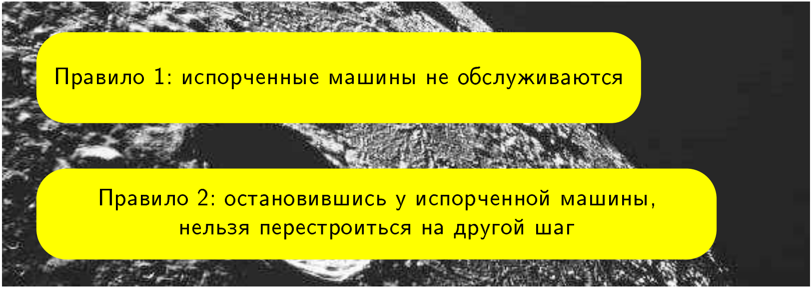


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Игрушечная модель-2

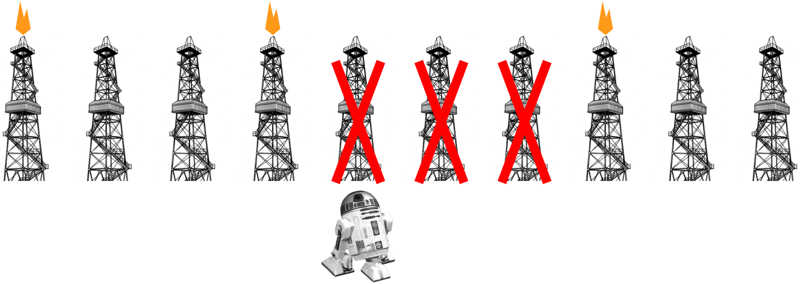


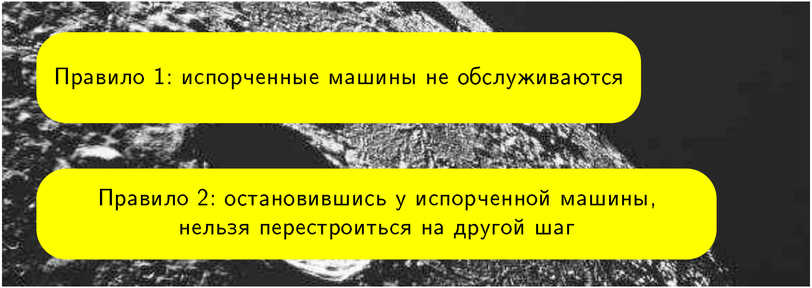


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Игрушечная модель-2

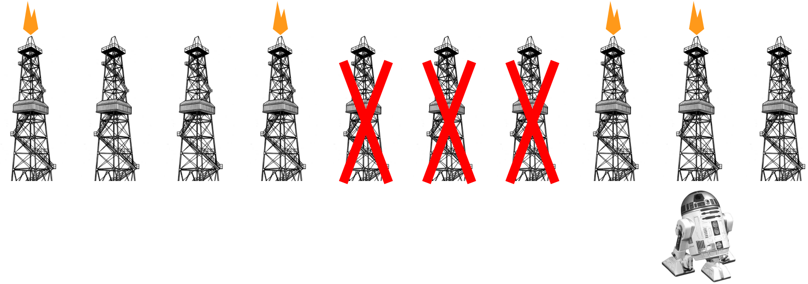


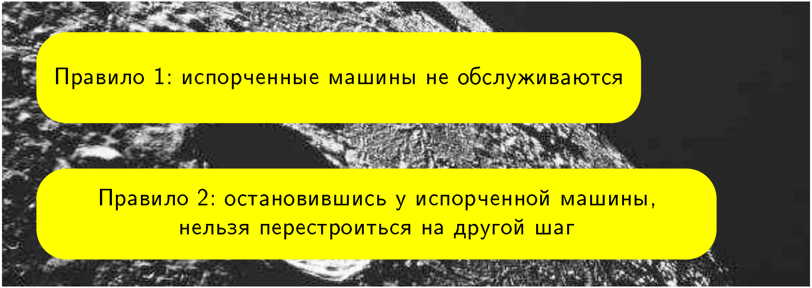


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Игрушечная модель-2

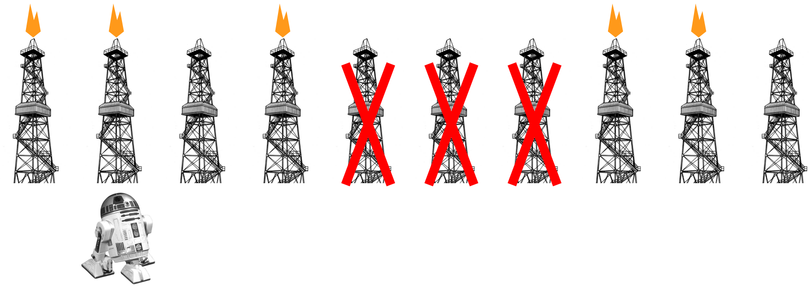


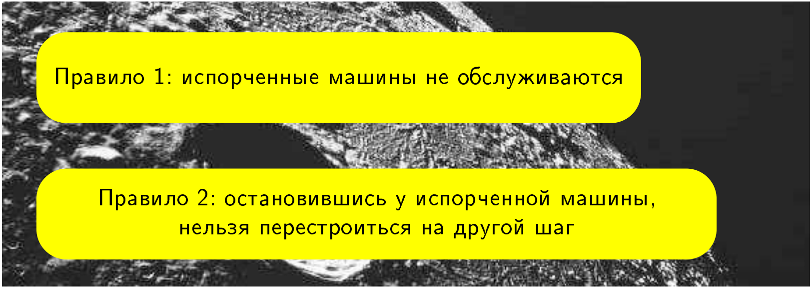


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Игрушечная модель-2

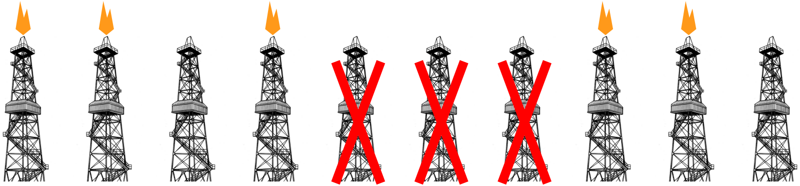


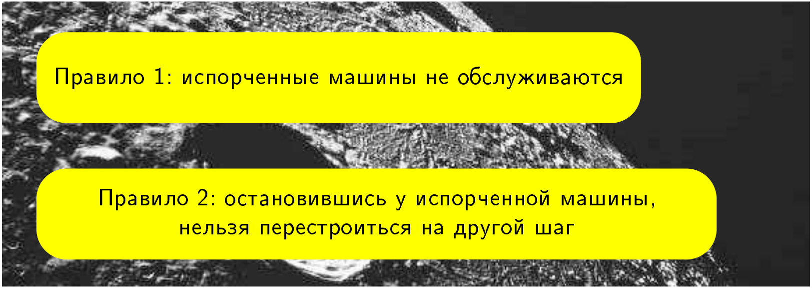


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Игрушечная модель-2

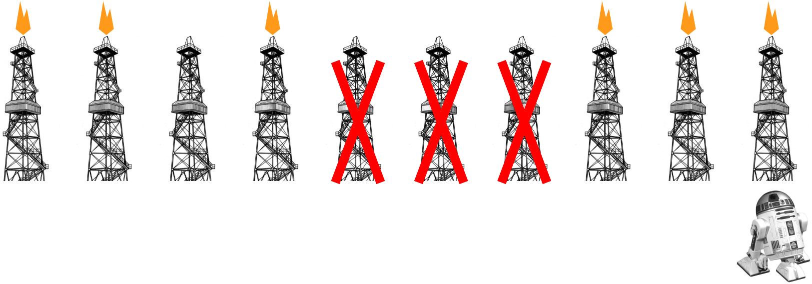


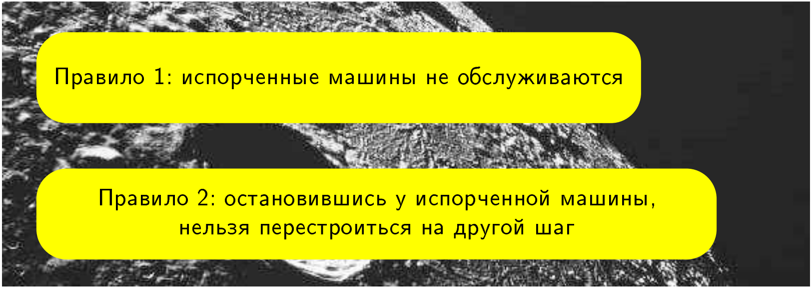


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины,
нельзя перестроиться на другой шаг

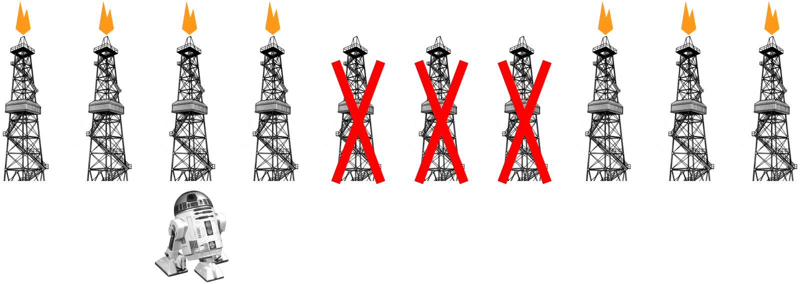
# Игрушечная модель-2





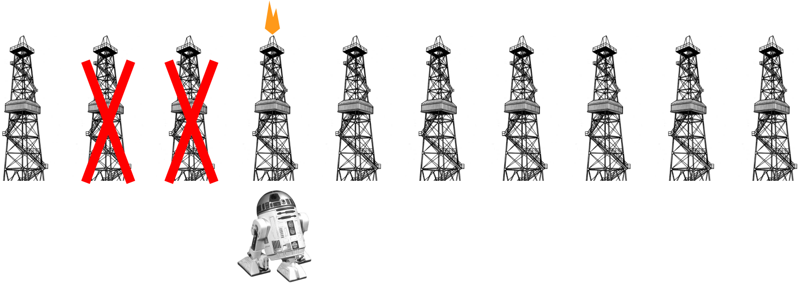
Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

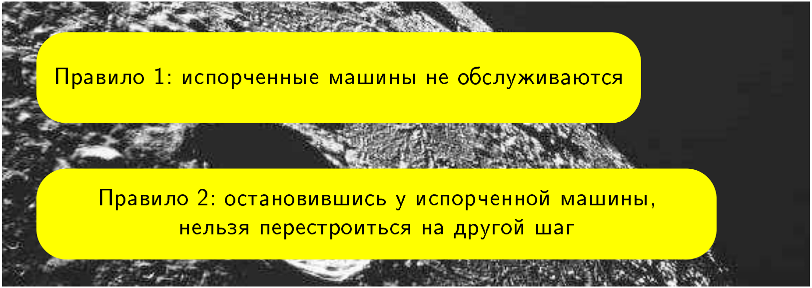
Правило 2: остановившись у испорченной машины,
нельзя перестроиться на другой шаг



Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

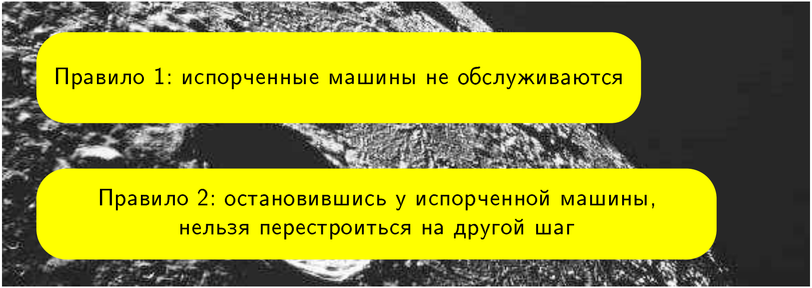
Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг





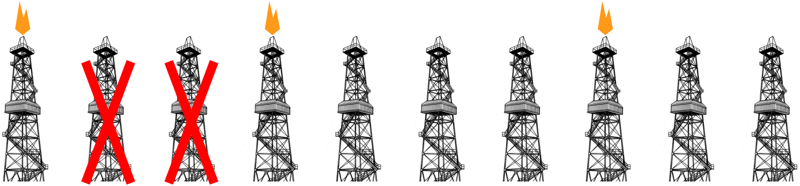
Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

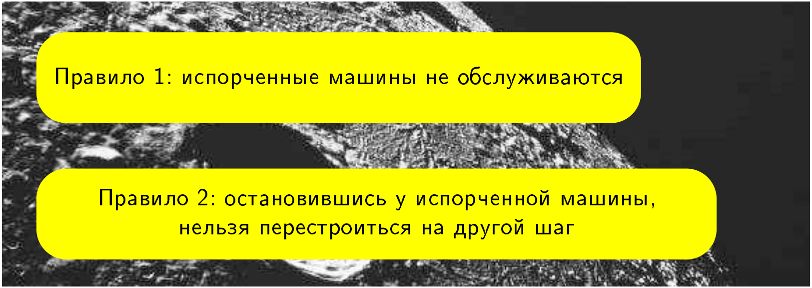
Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг



Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины,
нельзя перестроиться на другой шаг

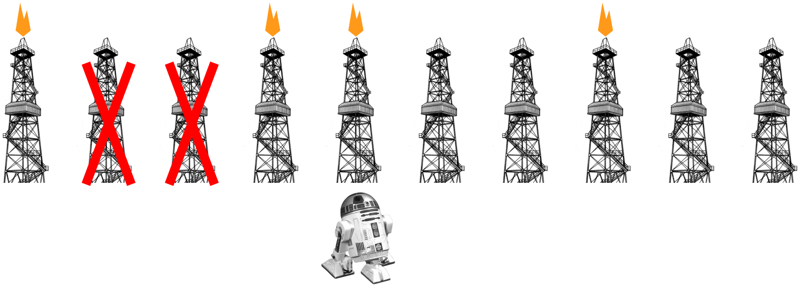


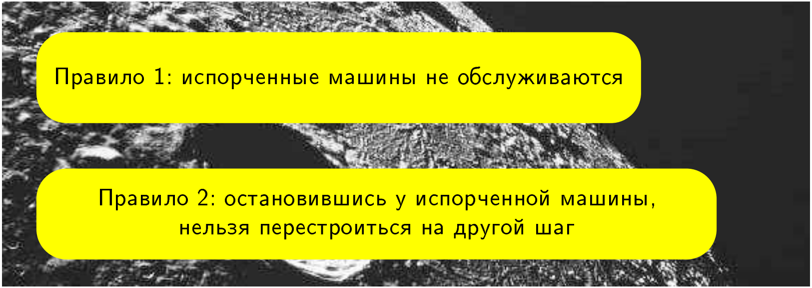


Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

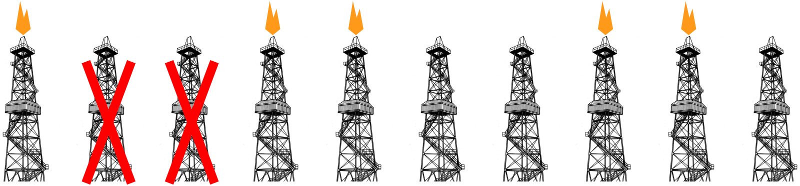
Правило 2: остановившись у испорченной машины,
нельзя перестроиться на другой шаг

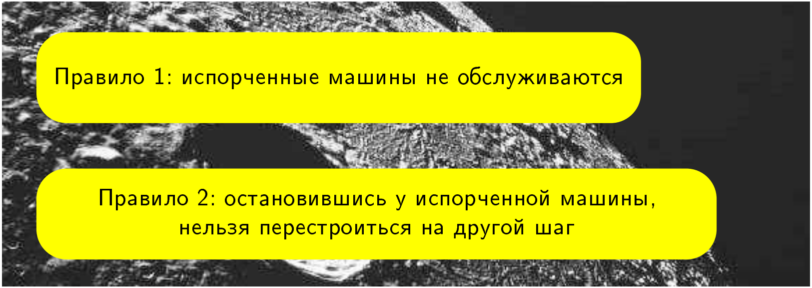
# More Play With The Advanced Toy Model



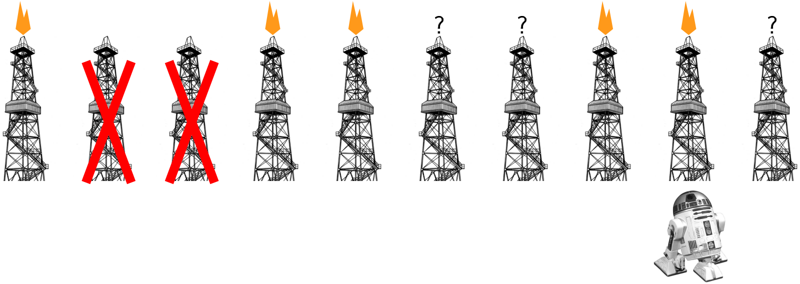


# More Play With The Advanced Toy Model



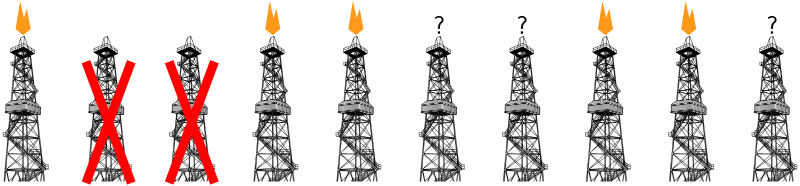


# More Play With The Advanced Toy Model




Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг




Каково количество (или доля) машин, которые могут быть выведены из строя, если оставшаяся система обязана быть управляемой?

Правило 1: испорченные машины не обслуживаются

Правило 2: остановившись у испорченной машины, нельзя перестроиться на другой шаг

# Математика игрушечной модели-2

- Даны шаги робота $p$, $q$ и множество $D \subseteq \{1, \ldots, L\}$ исправных машин
  - $L > p > q > 1$, $\gcd(p, q) = 1$;
- Построено отношение эквивалентности на $D$, порожденное всеми парами чисел, равных по модулю $p$ или по модулю $q$
- Вопрос: совпадает ли отношение с $L^2$?
- Второй вопрос: можно ли гарантировать, что отношение совпадет с $L^2$, зная только $L$, $p$, $q$ и $|D|$?

## Математика игрушечной модели-2

- Даны шаги робота $p$, $q$ и множество $D \subseteq \{1, \ldots, L\}$ исправных машин
  - $L > p > q > 1$, $\gcd(p, q) = 1$;
- Построено отношение эквивалентности на $D$, порожденное всеми парами чисел, равных по модулю $p$ или по модулю $q$
- Вопрос: совпадает ли отношение с $L^2$?
- Второй вопрос: можно ли гарантировать, что отношение совпадет с $L^2$, зная только $L$, $p$, $q$ и $|D|$?

Мы получаем в точности постановку задачи о взаимодействии периодов для частичных слов и взаимно простых периодов. Из формулы

$$L(k, p, q) = \frac{pq}{p + q - 2} \cdot k + \Delta(k, p, q)$$

мы знаем, что потерять некоторую долю машин (между $1/q$ и $2/q$) безопасно с точки зрения управляемости системы.

- Даны шаги робота $p$, $q$ и множество $D \subseteq \{1, \dots, L\}$ исправных машин
  - $L > p > q > 1$, $\gcd(p, q) = 1$;
- Построено отношение эквивалентности на $D$, порожденное всеми парами чисел, равных по модулю $p$ или по модулю $q$
- Вопрос: совпадает ли отношение с $L^2$?
- Второй вопрос: можно ли гарантировать, что отношение совпадет с $L^2$, зная только $L$, $p$, $q$ и $|D|$?

Мы получаем в точности постановку задачи о взаимодействии периодов для частичных слов и взаимно простых периодов. Из формулы

$$L(k, p, q) = \frac{pq}{p + q - 2} \cdot k + \Delta(k, p, q)$$

мы знаем, что потерять некоторую долю машин (между $1/q$ и $2/q$) безопасно с точки зрения управляемости системы.

Если потерять больше машин, то управляемость зависит от расположения машин, вышедших из строя. Как насчет управляемости с высокой вероятностью? Какую часть машин можно позволить себе потерять в этом случае?

## Определения случайных объектов

Пусть даны четыре натуральных параметра: $n, k, p, q$, причем $n > \max\{k+1, p, q\}$, $p > q > 1$.

Маска $u$ есть бинарное слово длины $n$ с $k$ нулями; $S(n, k)$ — множество всех масок.

Каждой маске сопоставляется единственное частичное слово $\hat{u}_{p,q}$ длины $n$ с периодами $p$ и $q$: $D(\hat{u}_{p,q})$ есть множество позиций единиц в $u$, буквы определяют классы эквивалентности по $p$- и $q$-периодичности, порядок выбора букв зафиксирован для всех слов.

Случайное частичное слово есть случайная величина $W(n, k, p, q)$, равномерно распределенная среди всех $\hat{u}_{p,q}$, где $u \in S(n, k)$.

Отношение мощностей множеств $I_{n,k,p,q} = \{u \in S_{n,k} \mid \hat{u}_{p,q} \text{ унарно}\}$ и $S(n, k)$ есть вероятность выполнения свойства взаимодействия для $W(n, k, p, q)$.

## Определения случайных объектов

Пусть даны четыре натуральных параметра: $n, k, p, q$, причем $n > \max\{k+1, p, q\}$, $p > q > 1$.
Маска $u$ есть бинарное слово длины $n$ с $k$ нулями; $S(n, k)$ — множество всех масок.
Каждой маске сопоставляется единственное частичное слово $\hat{u}_{p,q}$ длины $n$ с периодами $p$ и $q$: $D(\hat{u}_{p,q})$ есть множество позиций единиц в $u$, буквы определяют классы эквивалентности по $p$- и $q$-периодичности, порядок выбора букв зафиксирован для всех слов.
Случайное частичное слово есть случайная величина $W(n, k, p, q)$, равномерно распределенная среди всех $\hat{u}_{p,q}$, где $u \in S(n, k)$.
Отношение мощностей множеств $I_{n,k,p,q} = \{u \in S_{n,k} \mid \hat{u}_{p,q} \text{ унарно}\}$ и $S(n, k)$ есть вероятность выполнения свойства взаимодействия для $W(n, k, p, q)$.

## Постановка задачи

Исследовать вероятность выполнения свойства взаимодействия, когда параметры $W$ стремятся к бесконечности (каждый по-своему). Найти аналог «длины взаимодействия», гарантирующий выполнение свойства с высокой вероятностью.

# Переход к двудольным графам

Пусть $w$ — реализация $W(n,k,p,q)$. Назовем *P-классом* (*Q-классом*) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

## Переход к двудольным графам

Пусть $w$ — реализация $W(n, k, p, q)$. Назовем $P$-классом ($Q$-классом) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

Рассмотрим двудольный граф $G_w = (Q, P, E_w)$, где

- $Q = \{0, \ldots, q-1\}$, $P = \{0, \ldots, p-1\}$
- каждой позиции $i \in D(w)$ соответствует ребро $(i \bmod q, i \bmod p)$ (допускаются кратные ребра)

# Переход к двудольным графам

Пусть $w$ — реализация $W(n,k,p,q)$. Назовем $P$-классом ($Q$-классом) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

Рассмотрим двудольный граф $G_w = (Q, P, E_w)$, где

- $Q = \{0, \ldots, q{-}1\}$, $P = \{0, \ldots, p{-}1\}$
- каждой позиции $i \in D(w)$ соответствует ребро $(i \bmod q, i \bmod p)$ (допускаются кратные ребра)

Пример:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | ◇ | ◇ |  | ◇ | ◇ | ◇ |  | ◇ | ◇ | ◇ |  |  |  |  |

$q = 3$

$p = 5$

# Переход к двудольным графам

Пусть $w$ — реализация $W(n, k, p, q)$. Назовем $P$-классом ($Q$-классом) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

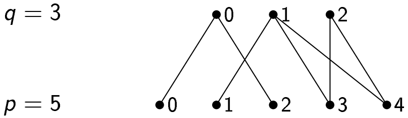
- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

Рассмотрим двудольный граф $G_w = (Q, P, E_w)$, где

- $Q = \{0, \ldots, q-1\}$, $P = \{0, \ldots, p-1\}$
- каждой позиции $i \in D(w)$ соответствует ребро $(i \bmod q, i \bmod p)$ (допускаются кратные ребра)

Пример:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ◇ | ◇ | | ◇ | ◇ | ◇ | | ◇ | ◇ | ◇ | | | | |



# Переход к двудольным графам

Пусть $w$ — реализация $W(n,k,p,q)$. Назовем $P$-классом ($Q$-классом) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

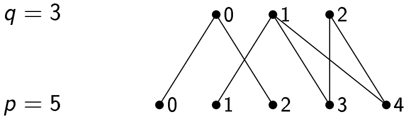
- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

Рассмотрим двудольный граф $G_w = (Q, P, E_w)$, где

- $Q = \{0, \ldots, q-1\}$, $P = \{0, \ldots, p-1\}$
- каждой позиции $i \in D(w)$ соответствует ребро $(i \bmod q, i \bmod p)$ (допускаются кратные ребра)

Пример:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $a$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $a$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $b$ | $a$ | $a$ | $b$ |



Пусть $w$ — реализация $W(n,k,p,q)$. Назовем $P$-классом ($Q$-классом) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

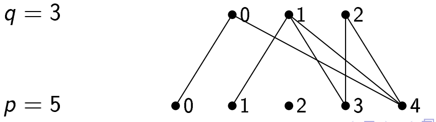
- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

Рассмотрим двудольный граф $G_w = (Q, P, E_w)$, где

- $Q = \{0,\dots,q{-}1\}$, $P = \{0,\dots,p{-}1\}$
- каждой позиции $i \in D(w)$ соответствует ребро $(i \bmod q, i \bmod p)$ (допускаются кратные ребра)

Пример:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ◇ | ◇ | | ◇ | ◇ | ◇ | | | ◇ | ◇ | ◇ | | | |



# Переход к двудольным графам

Пусть $w$ — реализация $W(n,k,p,q)$. Назовем $P$-классом ($Q$-классом) множество позиций в $w$, равным по модулю $P$ (модулю $Q$).

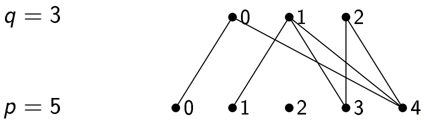
- Все позиции из $D(w)$, принадлежащие одному $P$- или $Q$-классу, содержат одинаковые буквы
- Каждая буква принадлежит $P$-классу и $Q$-классу, и эти классы содержат одинаковые буквы; это приводит к распространению одинаковых букв по транзитивности
- Классы, не пересекающие $D(w)$, не играют роли

Рассмотрим двудольный граф $G_w = (Q, P, E_w)$, где

- $Q = \{0, \ldots, q{-}1\}$, $P = \{0, \ldots, p{-}1\}$
- каждой позиции $i \in D(w)$ соответствует ребро $(i \bmod q, i \bmod p)$ (допускаются кратные ребра)

Пример:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $a$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $a$ | $a$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $\diamond$ | $a$ | $a$ | $a$ |



# Случайный двудольный граф

## Предложение

Реализация $w$ случайного частичного слова $W(n,k,p,q)$ является унарным словом т. и т.т.к. граф $G_w$ является связным по ребрам (т.е все ребра принадлежат одной компоненте связности).

# Случайный двудольный граф

## Предложение

Реализация $w$ случайного частичного слова $W(n, k, p, q)$ является унарным словом т. и т.т.к. граф $G_w$ является связным по ребрам (т.е все ребра принадлежат одной компоненте связности).

Случайный двудольный граф $G(p, q, m)$ есть случайная величина, равнораспределенная между всеми двудольными графами с $m$ ребрами и долями размера $p$ и $q$.

# Случайный двудольный граф

**Предложение**

Реализация $w$ случайного частичного слова $W(n,k,p,q)$ является унарным словом т. и т.т.к. граф $G_w$ является связным по ребрам (т.е все ребра принадлежат одной компоненте связности).

Случайный двудольный граф $G(p,q,m)$ есть случайная величина, равнораспределенная между всеми двудольными графами с $m$ ребрами и долями размера $p$ и $q$.

**Предложение**

Вероятность реберной связности $G(p,q,m)$ равна вероятности унарности $W(pq, pq-m, p, q)$.

Отображение $w \to G_w$ является биекцией между вероятностными пространствами. $\square$

# Случайный двудольный граф

## Предложение

Реализация $w$ случайного частичного слова $W(n, k, p, q)$ является унарным словом т. и т.т.к. граф $G_w$ является связным по ребрам (т.е все ребра принадлежат одной компоненте связности).

Случайный двудольный граф $G(p, q, m)$ есть случайная величина, равнораспределенная между всеми двудольными графами с $m$ ребрами и долями размера $p$ и $q$.

## Предложение

Вероятность реберной связности $G(p, q, m)$ равна вероятности унарности $W(pq, pq-m, p, q)$.

Отображение $w \to G_w$ является биекцией между вероятностными пространствами. $\square$

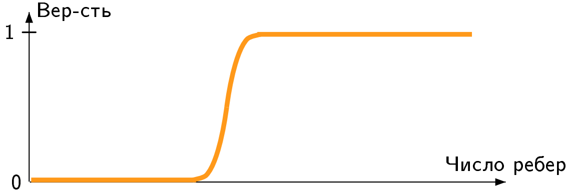
Для $n \neq pq$ нужно немного «подправить» модель случайного двудольного графа ($m$ ребер выбираются из $n$ слотов); можно показать, что при $n > pq$ асимптотические свойства будут такие же, как у базовой модели (при $n < pq$ скорее всего тоже, но не исследовано).

Чему равна вероятность того, что случайный граф имеет свойство $P$?

# Фазовые переходы

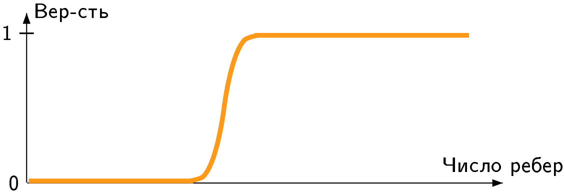
Чему равна вероятность того, что случайный граф имеет свойство $P$?

фазовый переход (как на картинке) – распространенное явление для многих свойств



Чему равна вероятность того, что случайный граф имеет свойство $P$?

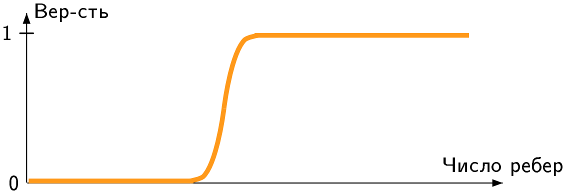
фазовый переход (как на картинке) – распространенное явление для многих свойств




Типичная ширина перехода: пусть $m = f(n) = n(\ln n + \ln\ln n + g(n))$.
если $g(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, случайный граф обладает $P$ с высокой вер-стью

Чему равна вероятность того, что случайный граф имеет свойство $P$?

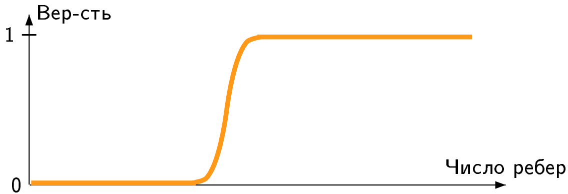
фазовый переход (как на картинке) – распространенное явление для многих свойств




Типичная ширина перехода: пусть $m = f(n) = n(\ln n + \ln\ln n + g(n))$.
если $g(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, случайный граф обладает $P$ с высокой вер-стью
если $g(n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, случайный граф не обладает $P$ с высокой вер-стью

Чему равна вероятность того, что случайный граф имеет свойство $P$?

фазовый переход (как на картинке) – распространенное явление для многих свойств




Типичная ширина перехода: пусть $m = f(n) = n(\ln n + \ln\ln n + g(n))$.
если $g(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, случайный граф обладает $P$ с высокой вер-стью
если $g(n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, случайный граф не обладает $P$ с высокой вер-стью
если $g(n) = \text{const} + o(1)$, случайный граф обладает $P$ с вер-стью, отделяемой от 0 и 1.

Пусть $f(p,q)$ – «точка» фазового перехода по свойству реберной связности случайного двудольного графа.

**Теорема (Идиатулина, Шур, 2012)**

Пусть $p > q \geqslant \frac{p \ln\ln p}{\ln p}$. Тогда

$$f(p,q) = \frac{pq}{p+q-2}\left(\ln\frac{pq}{p+q-2} + \ln\ln\frac{pq}{p+q-2} + g(p,q)\right)$$

**Теорема (Идиатулина, Шур, 2013)**

Пусть $q = o\left(\frac{p}{\ln p}\right)$. Тогда

$$f(p,q) = \sqrt{pq(\ln q + g(p,q))}$$

Переносится и на случай мультиграфов.

Пусть $f(p,q)$ – «точка» фазового перехода по свойству реберной связности случайного двудольного графа.

**Теорема (Идиатулина, Шур, 2012)**

Пусть $p > q \geqslant \frac{p \ln \ln p}{\ln p}$. Тогда

$$f(p,q) = \frac{pq}{p+q-2}\left(\ln \frac{pq}{p+q-2} + \ln \ln \frac{pq}{p+q-2} + g(p,q)\right)$$

**Теорема (Идиатулина, Шур, 2013)**

Пусть $q = o\left(\frac{p}{\ln p}\right)$. Тогда

$$f(p,q) = \sqrt{pq(\ln q + g(p,q))}$$

Переносится и на случай мультиграфов.

# Назад к роботу

## Основной вывод из теорем

Если нас интересует не гарантированная управляемость системы после потерь, а управляемость с высокой вероятностью, то потерять можно почти все машины. Число исправных машин, необходимое для управляемости, имеет порядок $q \log q$ и вообще не зависит от $n$!

# Назад к роботу

## Основной вывод из теорем

Если нас интересует не гарантированная управляемость системы после потерь, а управляемость с высокой вероятностью, то потерять можно почти все машины. Число исправных машин, необходимое для управляемости, имеет порядок $q \log q$ и вообще не зависит от $n$!

Однако по достижении предела потеря любой машины существенно уменьшает вероятность управляемости системы...