Введение в модальную логику, Лекция 3

Даня Рогозин
МГУ, Serokell

20 октября
Computer Science Club
ПОМИ РАН

На прошлой лекции мы

- Определили, что такое нормальная модальная логика
- Сформулировали минимальную нормальную модальную логику, логику $\mathbf{K}$
- Ввели каноническую модель, доказали лемму Линденбаума и лемму о канонической модели
- Показали, что $\mathbf{K}$ является логикой класса всех шкал Крипке

Каноническая шкала и каноническая модель

Напомним определения канонической шкалы и канонической модели

- *Канонической шкалой* логики $\mathcal{L}$ называется пара $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, \mathcal{W}_{\mathcal{R}} \rangle$, где
  1. $W_{\mathcal{L}}$ — это множество всех максимальных $\mathcal{L}$-непротиворечивых множеств
  2. $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Leftrightarrow \forall \phi \; \Box \phi \in \Gamma \Rightarrow \phi \in \Delta$
- Также условие на отношение достижимости в канонической шкале можно ввести так:

$$\forall \phi \; (\phi \in \Delta \Rightarrow \Diamond \phi \in \Gamma)$$

- *Канонической моделью* мы называли модель $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, состоящей из канонической шкалы и канонической оценки, то есть такой оценки $\vartheta_{\mathcal{L}}$, что

$$\vartheta_{\mathcal{L}}(p) = \{\Gamma \in W_{\mathcal{L}} \mid p \in \Gamma\}$$

Лемма о канонической модели

Вспомним, что мы доказали про максимально непротиворечивые множества и каноническую модель:

1. Всякое $\mathcal{L}$-непротиворечивое множество содержится в максимальном $\mathcal{L}$-непротиворечивом (лемма Линденбаума)
2. Если Γ максимальное $\mathcal{L}$-непротиворечивое множество, то
   - $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$
   - $\phi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\phi \notin \Gamma$
   - $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi, \psi \in \Gamma$
3. $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$
4. $\mathcal{L} \vdash \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Модальные логики

Вспомним к список модальных формул из первой лекции:

- **AT** $\Box p \to p$ (рефлексивность)
- **A4** $\Box p \to \Box\Box p$ (транзитивность)
- **AB** $p \to \Box\Diamond p$ (рефлексивность)
- **ACR** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ (формула Черча-Россера)
- **AD** $\Diamond\top$ (сериальность)

Определим список логик:

Модальные логики

Примеры модальных логик:

- $\mathbf{T} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to p$
- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \Diamond \top$
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \Box p \to p = \mathbf{T} \oplus \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathbf{S5} = \mathbf{S4} \oplus p \to \Box\Diamond p$
- $\mathbf{S4.2} = \mathbf{S4} \oplus \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

Каноническая логика

Определение

- *Формула* ϕ *называется канонической, если логика* $\mathcal{L} = \mathsf{K} \oplus \phi = Log(\mathcal{F}_{\mathcal{L}})$
- *Логика называется канонической, если* $\mathcal{L} = Log(\mathcal{F}_{\mathcal{L}})$.

Лемма

Если логика каноническая, то она полна.

Лемма о каноничности формул

Лемма

Следующие формулы канонические:

1. **AT** $\Box p \to p$
2. **A4** $\Box p \to \Box\Box p$
3. **AB** $p \to \Box\Diamond p$
4. **ACR** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$
5. **AD** $\Diamond\top$

Рассмотрим случаи **A4** и **AT**.

Лемма о каноничности формул

Лемма

Формула $\Box p \to \Box\Box p$ канонична, то есть $\mathcal{F}_{\mathbf{K}4} \models \Box p \to \Box\Box p$.

Снова перепишем формулу **A4** как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

Proof.

Пусть $\Gamma, \Delta, \Theta \in W_{\mathbf{K}4}$, такие что $\Gamma R_{\mathbf{K}4} \Delta$ и $\Delta R_{\mathbf{K}4} \Theta$. Покажем, что если $\phi \in \Theta$, то $\Diamond\phi \in \Gamma$. Пусть $\phi \in \Theta$, тогда, по лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathbf{K}4}, \Theta \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathbf{K}4}, \Delta \models \Diamond\phi$, откуда $\mathcal{M}_{\mathbf{K}4}, \Gamma \models \Diamond\Diamond\phi$. С другой стороны, $\mathcal{M}_{\mathbf{K}4}, \Gamma \models \Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$ по лемме о канонической модели. Тогда $\mathcal{M}_{\mathbf{K}4}, \Gamma \models \Diamond\phi$, тогда $\Diamond\phi \in \Gamma$. $\square$

Лемма о каноничности формул

Лемма

Формула $\Box p \to p$ канонична, то есть $\mathcal{F}_T \models \Box p \to p$.

Proof.

Пусть $\Gamma \in W_{\mathbf{T}}$ и $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}, \Gamma \models p$. $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}, \Gamma \models p \to \Diamond p$ по лемме о канонической модели и $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}, \Gamma \models \Diamond p$. Тогда $\Diamond p \in \Gamma$, значит, $\Gamma R_{\mathbf{T}} \Gamma$. □

Лемма о каноничности логик

Вернемся к списку логик:

- $\mathbf{T} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to p$
- $\mathbf{K}4 = \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$
- $\mathbf{S}4 = \mathbf{K}4 \oplus \Box p \to p = \mathbf{T} \oplus \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathbf{S}5 = \mathbf{S}4 \oplus p \to \Box\Diamond p$
- $\mathbf{S}4.2 = \mathbf{S}4 \oplus \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

Следующее утверждение легко следует из леммы о каноничности формул:

Лемма

Логики из списка выше являются каноническими

Теорема о полноте

Имеет место следующая теорема:

Теорема

1. $\mathbf{T} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — класс всех рефлексивных шкал.
2. $\mathbf{K4} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — класс всех транзитивных шкал.
3. $\mathbf{D} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — класс всех сериальных шкал.
4. $\mathbf{S4} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — класс всех предпорядков.
5. $\mathbf{S5} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — класс всех отношений эквивалентности.
6. $\mathbf{S4.2} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — класс всех конфлюентных предпорядков.

Proof.

Рассмотрим в качестве примера логику $\mathbf{S4}$ $\square$

Теорема о полноте

Теорема

$\mathbf{S4} = Log(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— класс всех предпорядков.*

Proof.

Рассмотрим следующие включения:

$$\mathbf{S4} \subseteq Log(\mathbb{F}) \subseteq Log(\mathcal{F}_{\mathbf{S4}}) \subseteq \mathbf{S4}$$

Первое включение — это теорема корректности для $\mathbf{S4}$.
Третье включение (и, более того, равенство) следует из того факта, что $\mathbf{S4}$ является канонической логикой.
Второе включение следует из того факта, каноническая шкала $\mathcal{F}_{\mathbf{S4}}$ является предпорядком. $\square$

Пример неканонической логики

Мы сказали, что всякая каноническая логика полна. Рассмотрим пример логики, которая полна по Крипке, но не является канонической.

Нётерово отношение

Определение

Отношение $R \subseteq W \times W$ *является обратно фундированным (нётеровым), если не существует бесконечных цепей* $a_1 R a_2 R \ldots$.

Эквивалентные определения нётеровости

Лемма

Отношение $R \subseteq W \times W$ является нётеровым $\Leftrightarrow$ каждое непустое подмножество W имеет R-максимальный элемент.

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть отношение R не является нётеровым, тогда найдется бесконечная цепь $a_1 R a_2 R \dots$. Тогда множество $W' = \{a_1, a_2, \dots\}$ не будет содержать максимального элемента. $\square$

Эквивалентные определения нётеровости

Лемма

Отношение $R \subseteq W \times W$ является нётеровым $\Leftrightarrow$ каждое непустое подмножество W имеет R-максимальный элемент.

WARNING: обратная импликация требует аксиомы выбора.

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть W' не имеет максимального элемента. Пусть $a_0 \in W'$, тогда найдется a_1, такой, что $a_0 R a_1$. Дальше, для любого $n \in \mathbb{N}$, $a_n R a_{n+1}$. По аксиоме выбора, можно построить последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которая по отношению R и образует бесконечную последовательность $a_0 R a_1 R a_2 \dots$. $\square$

Формула Лёба

Определение

Формулой Лёба называется формула вида $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$*, или, что эквивалентно,* $\Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)$.

Определение

Логика Гёделя-Лёба $\mathbf{GL} = \mathbf{K} \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Нётеровость шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — это шкала Крипке, тогда

- $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p \Leftrightarrow R$ *транзитивно и нётерово*

Proof.

$(\Rightarrow)$. Покажем транзитивность.
Пусть $x, y, z \in W$ и $xRyRz$. Положим $\vartheta(p) = W \backslash \{y, z\}$ и $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta\rangle$. Тогда $\mathcal{M}, x \not\models \Box p$ и $\mathcal{M}, y \not\models p$. При этом, ясно, что $\mathcal{M}, x \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Тогда $\mathcal{M}, x \not\models \Box(\Box p \to p)$, тогда найдется $z' \in R(x)$, что $\mathcal{M}, z' \models \Box p$ и $\mathcal{M}, z' \not\models p$. Значит, $z' = y$ или $z' = z$. Первое равенство неверно, так как $\mathcal{M}, y \not\models p$. Остается только z, тогда xRz. □

Нётеровость шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

- $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p \Leftrightarrow R$ *транзитивно и нётерово*

Proof.

$(\Rightarrow)$. Покажем нётеровость.
Пусть $W' \subseteq W$ непустое подмножество и $x \in W'$. Положим $\vartheta(p) = W'$, покажем, что W' имеет максимальный элемент. Если x не максимальный, то $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$.
Тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)$. То есть, найдется $y \in R(x)$, что $\mathcal{M}, y \models p \wedge \neg\Diamond p$.
Тогда максимальный элемент W'.

$\square$

Нётеровость шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — *это шкала Крипке, тогда*

- $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p \Leftrightarrow R$ *транзитивно и нётерово*

Proof.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\mathcal{F}$ транзитивна и нётерова и ϑ — это оценка. Пусть $x \in W$ и $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$. Положим $W' = \vartheta(p) \cap R(x)$, которое непусто. Пусть y — максимальный элемент W', тогда $\mathcal{M}, y \models p$ и $\mathcal{M}, y \not\models \Diamond p$, то есть $\mathcal{M}, y \models \neg\Diamond p$. Тогда $\mathcal{M}, y \models p \wedge \neg\Diamond p$. Откуда $\mathcal{M}, x \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)$. □

Нётеровость шкал

Следствие

1. *Если* $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, *тогда* $\mathcal{F}$ *иррефлексивна, то есть* $\forall x \in W \ \neg(xRx)$
2. *Если* $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, *тогда* $\mathcal{F} \not\models \Box p \to p$

Proof.

1. Пусть $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ и существует $x \in W$, такой что xRx. Данная шкала является нётеровой. С другой стороны, существует бесконечно возрастающая цепь $xRxRx \dots$, противоречие.
2. Очевидно.

$\Box$

Неканоничность формулы Лёба

Лемма

$\mathcal{F}_{\mathbf{GL}} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Proof.

Покажем, что отношение $R_{\mathbf{GL}}$ в канонической шкале не является иррефлексивным. Пусть $\Gamma = \{\phi \to \Diamond\phi \mid \phi \in Fm\}$. Покажем, что Γ **GL**- непротиворечиво. Предположим противное. Тогда найдутся такие $\psi_1, \dots, \psi_n$, что $\neg((\psi_1 \to \Diamond\psi_1) \wedge \dots \wedge (\psi_n \to \Diamond\psi_n)) \in \mathbf{GL}$. Данная формула эквивалентна следующей

$$(\psi_1 \wedge \Box\neg\psi_1) \vee \dots \vee (\psi_n \wedge \Box\neg\psi_n)) \in \mathbf{GL}.$$

Обозначим последнюю формулу как ψ.

□

Неканоничность формулы Лёба

Лемма

$\mathcal{F}_{\mathbf{GL}} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Proof.

(Продолжение.) Рассмотрим шкалу $\mathcal{F} = \langle n+1, < \rangle$, где $n+1 = \{0, \ldots, n\}$. Легко видеть, что $\mathcal{F} \models \mathbf{GL}$. Пусть $\mathcal{M}$ — это модель на шкале $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{M} \models \psi$. Тогда в каждой точке модели истинен какой-то дизъюнктивный член $\psi_i \wedge \Box \neg \psi_i$ при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$. С другой стороны, у нас n дизъюнктивных членов, тогда как в модели $n+1$ точка. $\Box$

Неканоничность формулы Лёба

Лемма

$\mathcal{F}_{\mathbf{GL}} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Proof.

(Продолжение.) Тогда найдется такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $\mathcal{M}, k \models \psi_j \wedge \Box\neg\psi_j$ и $\mathcal{M}, l \models \psi_j \wedge \Box\neg\psi_j$, при некоторых $k, l \in n+1$ и $k < l$. Тогда $\mathcal{M}, k \models \Diamond\psi_j$. При этом, $\mathcal{M}, k \models \Box\neg\psi_j$, что эквивалентно, $\mathcal{M}, k \models \neg\Diamond\psi_j$. Противоречие.

Тогда Γ **GL**-непротиворечиво. По лемме Линденбаума, множество Γ содержится в некотором максимально **GL**-непротиворечивом множестве Δ. Нетрудно проверить, что $\Delta R_{\mathbf{GL}} \Delta$. $\square$

Что делать?

- Таким образом, логика Гёделя-Лёба не является логикой собственной канонической шкалы.
- То есть, мы не можем доказать ее полноту способом аналогичным тому, что мы использовали, скажем, для логики предпорядков **S**4.
- Полноту логики **GL** относительно транзитивных нётеровых шкал можно доказать, но чуть более витеиватым способом.
- Сначала поговорим о селективной фильтрации модели

Селективная фильтрация

Определение

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, R, \vartheta \rangle$ *и* Γ *— множество формул, замкнутое относительно подформул. Селективной фильтрацией модели* $\mathcal{M}$ *по множеству формул* Γ *называется модель* $\mathcal{M} = \langle W', R', \vartheta' \rangle$*, где* $W' \subseteq W$*,* $R' \subseteq R$ *и* $\vartheta'(p) = \vartheta(p) \cap W'$ *для* $p \in \Gamma$ *со следующим условием:*

- $\forall \Diamond \phi \in \Gamma \ \forall x \in W' \ \ \mathcal{M}, x \models \Diamond \phi \Rightarrow \exists y \in R'(x) \ \ \mathcal{M}, y \models \phi$

Для общей эрудиции: селективная фильтрация является релятивизацией того, что в теории моделей называется критерием Тарского-Вота для элементарных подмоделей.

Лемма о селективной фильтрации

Лемма

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, R, \vartheta \rangle$, Γ *— множество формул, замкнутое относительно подформул и* $\mathcal{M}' = \langle W', R', \vartheta' \rangle$ *— это селективная фильтрация модели* $\mathcal{M}$ *по* Γ.

- $\forall \phi \in \Gamma \ \forall x \in W' \ \ \mathcal{M}, x \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}', x \models \phi$

Рассмотрим случай $\phi \leftrightharpoons \Diamond \psi$

Proof.

1. $(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{M}, x \models \Diamond \psi$. Тогда найдется $y \in R'(x)$, что $\mathcal{M}, y \models \psi$. $\psi \in \Gamma$. Тогда по предположению индукции $\mathcal{M}', y \models \psi$, откуда $\mathcal{M}', x \models \Diamond \psi$.
2. $(\Leftarrow)$ Пусть $\mathcal{M}', x \models \Diamond \phi$, тогда найдется $y \in R'(x)$, что $\mathcal{M}', y \models \psi$. Тогда легко видеть, что $\mathcal{M}, x \models \Diamond \phi$.

$\square$

Полнота **GL** по Крипке

Теорема

GL $= Log(\mathcal{F})$, *где* $\mathcal{F}$ *— это класс транзитивных и нётереовых шкал.*

Proof.

Пусть ϕ, такая формула, что множество $\{\phi\}$ **GL**-непротиворечиво. Тогда найдется точка $\Gamma \in W_{\mathbf{GL}}$, что $\phi \in \Gamma$.
Тогда $\Diamond\phi \notin \Gamma$ или $\Diamond(\phi \wedge \neg\Diamond\phi) \in \Gamma$. Пусть $\Delta \in W_{\mathbf{GL}}$, такое, что $\phi \in \Delta$ и $\neg\Diamond\phi \in \Delta$.
Пусть $V_\phi = \{\Theta \mid \mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Theta \models \psi,$ для некоторого $\psi \in Sub(\phi)\}$. $\square$

Полнота **GL** по Крипке

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathbf{GL}} \upharpoonright V_\phi$ — это селективная фильтрация $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}$ по $Sub(\phi)$

Proof.

Пусть $\Diamond\psi$ — это подформула ϕ, $\Theta \in V_\phi$ и $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Theta \models \Diamond\psi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Theta \models \Diamond(\psi \land \neg\Diamond\psi)$. Тогда найдется $\Xi \in V_\phi$, что $\Theta R_{\mathbf{GL}} \Xi$ и $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Xi \models \psi$. Но при этом $\Xi \in (R_{\mathbf{GL}} \upharpoonright V_\phi)(\Theta)$. $\square$

Полнота **GL** по Крипке

Лемма

$\mathcal{F}_{\mathbf{GL}} \upharpoonright V_\phi \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)$

Proof.

Заметим, что $\mathcal{F}_{\mathbf{GL}} \upharpoonright V_\phi$ иррефлексивна по построению. Также заметим, что нётеровость отношения следует из того факта, что длина каждой возрастающей цепи мажорируется числом подформул ϕ. $\square$

Полнота GL

Теорема

$\mathbf{GL} = Log(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — это класс всех транзитивных и нётеровых шкал.

Proof.

Следует из лемм выше. $\square$

На следующей лекции мы

- Докажем теорему Харропа, которая связывает разрешимость с конечной аксиоматизируемостью и полнотой в конечных шкалах
- Рассмотрим разновидности фильтраций, специальных процедур, которые позволяют преобразовывать модели в конечные
- Рассмотрим такие конструкции, как порожденные подшкалы/подмодели, развертка и конус в шкале
- Покажем разрешимость логик $\mathbf{K}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{K}4$, $\mathbf{S}4$, $\mathbf{S}4.2$, $\mathbf{S}5$ и $\mathbf{GL}$