Введение в модальную логику, Лекция 1

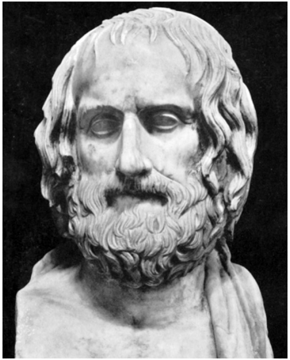
Даня Рогозин
МГУ, Serokell

19 октября
Computer Science Club
ПОМИ РАН

Эпиграф

Необходимость непреклонна

Эврипид, 480-е — 406 до н. э.,
финальные слова из трагедии "Гекуба"



Что такое модальная логика?

В рамках курса мы дадим точное математическое определение модальной логики. Пока что мы определим ее неформально. Неформально, модальная логика существует в двух смыслах:

Что такое модальная логика?

В рамках курса мы дадим точное математическое определение модальной логики. Пока что мы определим ее неформально. Неформально, модальная логика существует в двух смыслах:

- *В широком смысле*, модальная логика является ветвью неклассической логики, которая изучает утверждения, дополненные специальными качествами, как доказуемость, необходимость, возможность, и так далее

Что такое модальная логика?

В рамках курса мы дадим точное математическое определение модальной логики. Пока что мы определим ее неформально. Неформально, модальная логика существует в двух смыслах:

- *В широком смысле*, модальная логика является ветвью неклассической логики, которая изучает утверждения, дополненные специальными качествами, как доказуемость, необходимость, возможность, и так далее
- *В узком смысле*, под модальной логикой подразумевают конкретную логику, которая расширяет (как правило) классическую логику дополнительными модальными операторами. То есть, в узком смысле, модальная логика — это некоторое отдельно взятое исчисление

Очень краткая история

- Системы с модальностями впервые стал описывать Кларенс Льюис в начале 20-го века, который ввел в оборот связки $\Box$ и $\Diamond$, обозначающие необходимость и возможность соответственно. Тогда у этих модальностей не было семантики, связки понимались интуитивно

Очень краткая история

- Системы с модальностями впервые стал описывать Кларенс Льюис в начале 20-го века, который ввел в оборот связки $\Box$ и $\Diamond$, обозначающие необходимость и возможность соответственно. Тогда у этих модальностей не было семантики, связки понимались интуитивно
- В 1940-е годы некоторые из систем модальной логики изучались для описания топологических и метрических пространств. Это направление берет начало в работах Тарского и Маккинси

Очень краткая история

- Системы с модальностями впервые стал описывать Кларенс Льюис в начале 20-го века, который ввел в оборот связки $\Box$ и $\Diamond$, обозначающие необходимость и возможность соответственно. Тогда у этих модальностей не было семантики, связки понимались интуитивно
- В 1940-е годы некоторые из систем модальной логики изучались для описания топологических и метрических пространств. Это направление берет начало в работах Тарского и Маккинси
- В конце 1950-х годов Сол Крипке предложил строить реляционные модели для модальной и интуиционистской логик

Очень краткая история

- Системы с модальностями впервые стал описывать Кларенс Льюис в начале 20-го века, который ввел в оборот связки $\Box$ и $\Diamond$, обозначающие необходимость и возможность соответственно. Тогда у этих модальностей не было семантики, связки понимались интуитивно
- В 1940-е годы некоторые из систем модальной логики изучались для описания топологических и метрических пространств. Это направление берет начало в работах Тарского и Маккинси
- В конце 1950-х годов Сол Крипке предложил строить реляционные модели для модальной и интуиционистской логик
- 1960-е–1970-е (что верно и по сей день) модальная логика эмансипируется от своих философских корней и становится математической самостоятельной дисциплиной, что сложилось в результате исследований Сегерберга, Салквиста, Гольдблатта, Томасона, Габбая, и т. д.

Место модальной логики в общем контексте

В математической логике можно выделить три основных раздела, в контексте которых существует и модальная логика:

Место модальной логики в общем контексте

В математической логике можно выделить три основных раздела, в контексте которых существует и модальная логика:

- *Теория доказательств* изучает свойства и структуру логических выводов, доказуемость в тех или иных формальных теориях

Место модальной логики в общем контексте

В математической логике можно выделить три основных раздела, в контексте которых существует и модальная логика:

- *Теория доказательств* изучает свойства и структуру логических выводов, доказуемость в тех или иных формальных теориях
- *Теория моделей* изучает семантику логических формул и их математическую интерпретацию

Место модальной логики в общем контексте

В математической логике можно выделить три основных раздела, в контексте которых существует и модальная логика:

- *Теория доказательств* изучает свойства и структуру логических выводов, доказуемость в тех или иных формальных теориях
- *Теория моделей* изучает семантику логических формул и их математическую интерпретацию
- *Теория алгоритмов* ставит вопрос о вычислимости за конечное число шагов и о затратах ресурсов на выполнение той или иной процедуры

Определение

Пусть $\mathbb{V} = \{p, q, r, \ldots\}$ *счетное множество пропозициональных переменных.*
Множество формул Fm *определяется индуктивно:*

Модальный язык

Определение

Пусть $\mathbb{V} = \{p, q, r, ...\}$ *счетное множество пропозициональных переменных. Множество формул* Fm *определяется индуктивно:*

1. *Всякая переменная — это формула*
2. *Если* ϕ *— это формула, то* $\neg\phi$ *— это формула*
3. *Если* ϕ, ψ *— это формулы, то* $(\phi \to \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ *— это формулы*
4. *Если* ϕ *— это формула, то* $\Box\phi$ *— это формула*

Модальный язык

Определение

Пусть $\mathbb{V} = \{p, q, r, ...\}$ *счетное множество пропозициональных переменных. Множество формул Fm определяется индуктивно:*

1. *Всякая переменная — это формула*
2. *Если* ϕ *— это формула, то* $\neg\phi$ *— это формула*
3. *Если* ϕ, ψ *— это формулы, то* $(\phi \to \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ *— это формулы*
4. *Если* ϕ *— это формула, то* $\Box\phi$ *— это формула*

Также у нас будет связка $\Diamond$, *которую мы введем как сокращение* $\Diamond\phi = \neg\Box\neg\phi$.

Модальный язык

Связки $\neg$, $\to$, $\wedge$ и $\vee$ мы понимаем классически. Остается вопрос: как понимать $\Box$?

Существует масса способов, вот некоторые из них:

1. $\Box\phi$ — "ϕ необходимо". (алетическая модальность)
2. $\Box\phi$ — $\Box$ как предикат доказуемости в арифметической теории **T** (например, в арифметике Пеано)
3. $\Box\phi$ — $\Box$ как внутренность множества в топологическом пространстве (топологическая модальность, моя любимая)
4. $\Box\phi$ — "всегда будет ϕ" (временная модальность)

Шкала Крипке

Определение

Шкала Крипке — это пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$*, где* W *непустое множество, а* $R \subseteq W \times W$ *— это бинарное отношение на множестве* W

- Множество W называют *носителем шкалы*. Более философски, W — это множество возможных миров или положений дел.

Шкала Крипке

Определение

Шкала Крипке — это пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *где* W *непустое множество, а* $R \subseteq W \times W$ *— это бинарное отношение на множестве* W

- Множество W называют *носителем шкалы*. Более философски, W — это множество возможных миров или положений дел.
- Отношение R часто называют *отношением достижимости*. Если x находится y в отношении R, то мы будем говорить, что "x видит y" и писать xRy

Шкала Крипке

Определение

Шкала Крипке — это пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, где W непустое множество, а $R \subseteq W \times W$ — это бинарное отношение на множестве W

- Множество W называют *носителем шкалы*. Более философски, W — это множество возможных миров или положений дел.
- Отношение R часто называют *отношением достижимости*. Если x находится y в отношении R, то мы будем говорить, что "x видит y" и писать xRy
- Можно также считать шкалу Крипке ориентированным графом, в котором R — это множество ребер в данном графе.

Шкала Крипке

Определение

Шкала Крипке — это пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, где W непустое множество, а $R \subseteq W \times W$ — это бинарное отношение на множестве W

- Множество W называют *носителем шкалы*. Более философски, W — это множество возможных миров или положений дел.
- Отношение R часто называют *отношением достижимости*. Если x находится y в отношении R, то мы будем говорить, что "x видит y" и писать xRy
- Можно также считать шкалу Крипке ориентированным графом, в котором R — это множество ребер в данном графе.

Также мы будет использовать обозначение $R(x) = \{y \mid xRy\}$

Модель Крипке

Определение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке. Модель Крипке — это упорядоченная пара* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$, *где* $\vartheta : \mathbb{V} \to 2^{W}$ *— это функция оценки.*

Модель Крипке

Определение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке. Модель Крипке — это упорядоченная пара* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$*, где* $\vartheta : \mathbb{V} \to 2^W$ *— это функция оценки.*
Отношение истинности (также, отношение вынуждения) $\mathcal{M}, w \models \phi$ *определяется индукцией по формуле* ϕ*:*

Модель Крипке

Определение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке. Модель Крипке — это упорядоченная пара $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$, где $\vartheta : \mathbb{V} \to 2^W$ — это функция оценки.
Отношение истинности (также, отношение вынуждения) $\mathcal{M}, w \models \phi$ определяется индукцией по формуле ϕ:

- $\mathcal{M}, w \models p \Leftrightarrow w \in \vartheta(p)$
- $\mathcal{M}, w \models \neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models \phi$
- $\mathcal{M}, w \models \phi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \phi$ *или* $\mathcal{M}, w \models \psi$
- $\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \phi$ *и* $\mathcal{M}, w \models \psi$
- $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \Leftrightarrow \forall v \;\; wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \phi$

Модель Крипке

Неформально прокомментируем условие:

- $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \Leftrightarrow \forall v \;\; wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \phi$

Модель Крипке

Неформально прокомментируем условие:

- $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \Leftrightarrow \forall v \;\; wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \phi$

Здесь бокс удобнее всего читать через необходимость.

Модель Крипке

Неформально прокомментируем условие:

- $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \Leftrightarrow \forall v \;\; wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \phi$

Здесь бокс удобнее всего читать через необходимость.
ϕ истинно с необходимостью при положении дел w, если при любом развитии событий v, к которому можно прийти из w, утверждение ϕ будет истинно.

Модель Крипке

Неформально прокомментируем условие:

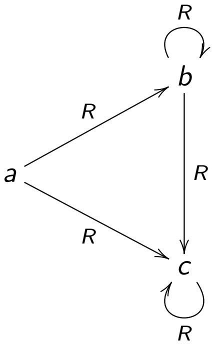
- $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \Leftrightarrow \forall v \;\; wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \phi$

Здесь бокс удобнее всего читать через необходимость.

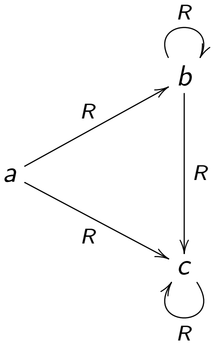
ϕ истинно с необходимостью при положении дел w, если при любом развитии событий v, к которому можно прийти из w, утверждение ϕ будет истинно.

$$\begin{tikzcd}
 & v_1 \models \phi & \\
v_4 \models \phi & w \models \Box\phi \arrow[l, "R"'] \arrow[u, "R"] \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R"] & v_2 \models \phi \\
 & v_3 \models \phi &
\end{tikzcd}$$

Пример модели Крипке

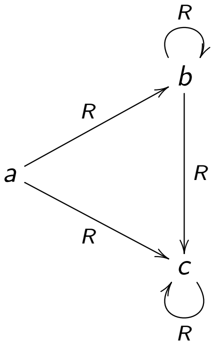


Пример модели Крипке



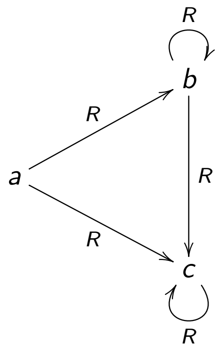
Пусть $\vartheta(p) = \{a, b, c\}$ и $\vartheta(q) = \{b\}$.

Пример модели Крипке



Пусть $\vartheta(p) = \{a, b, c\}$ и $\vartheta(q) = \{b\}$.
Тогда

Пример модели Крипке



Пусть $\vartheta(p) = \{a, b, c\}$ и $\vartheta(q) = \{b\}$.
Тогда

1. $a \models \Box p, \Box p \to \Box\Box p, \Diamond p \to \Diamond\Box p$, etc
2. $b \models \Box p \to p, \Box q \to q$
3. $c \models \Box p \to p$
4. $\mathcal{M} \models \Box p \to \Diamond p$

Истинность в модели и общезначимость в шкале

Определение

Формула ϕ *истинна в модели* $\mathcal{M}$*, если для любой точки* $w \in W$, $\mathcal{M}, w \models \phi$.
Кратко, $\mathcal{M} \models \phi$.

Истинность в модели и общезначимость в шкале

Определение

Формула ϕ *истинна в модели* $\mathcal{M}$, *если для любой точки* $w \in W$, $\mathcal{M}, w \models \phi$.
Кратко, $\mathcal{M} \models \phi$.

Определение

Формула ϕ *общезначима в шкале* $\mathcal{F}$, *если для любой оценки* ϑ, *в любой модели* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ *формула* ϕ *истинна, то есть* $\mathcal{M} \models \phi$.
Обозначение $\mathcal{F} \models \phi$

Логика класса шкал

Определение

Пусть $\mathcal{F}$ — это шкала Крипке. Логикой шкалы $\mathcal{F}$ называется множество формул, общезначимых в данной шкале. Обозначение $\mathrm{Log}(\mathcal{F}) = \{\phi \in Fm \mid \mathcal{F} \models \phi\}$

Логика класса шкал

Определение

Пусть $\mathcal{F}$ *— это шкала Крипке. Логикой шкалы* $\mathcal{F}$ *называется множество формул, общезначимых в данной шкале. Обозначение* $\mathrm{Log}(\mathcal{F}) = \{\phi \in Fm \mid \mathcal{F} \models \phi\}$

Определение

Пусть $\mathbb{F}$ *— это класс шкал. Логикой класса шкал* $\mathbb{F}$ *называется множество формул, общезначимых в каждой из шкал в данном классе. Обозначение*
$\mathrm{Log}(\mathbb{F}) = \bigcap\limits_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathrm{Log}(\mathcal{F})$.

Модальные формулы и свойства шкал

Можно исследовать взаимосвязи общезначимости тех или иных формул со свойствами шкал, на которых данные формулы общезначимы. Введем следующие формулы:

- **AT** $\Box p \to p$ (рефлексивность)
- **A4** $\Box p \to \Box\Box p$ (транзитивность)
- **AB** $p \to \Box\Diamond p$ (симметричность)
- **ACR** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ (формула Черча-Россера)
- **AD** $\Diamond\top$ (сериальность)

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

1. $\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \ \ xRx$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

1. $\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$
2. $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

1. $\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$
2. $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box \Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$
3. $\mathcal{F} \models p \to \Box \Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y \in W \;\; xRy \Rightarrow yRx$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

1. $\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$
2. $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \mathbin{\&} yRz \Rightarrow xRz$
3. $\mathcal{F} \models p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y \in W \;\; xRy \Rightarrow yRx$
4. $\mathcal{F} \models \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \mathbin{\&} xRz \Rightarrow \exists z_1 \in W \; yRz_1 \mathbin{\&} zRz_1$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

1. $\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$
2. $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box \Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$
3. $\mathcal{F} \models p \to \Box \Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y \in W \;\; xRy \Rightarrow yRx$
4. $\mathcal{F} \models \Diamond \Box p \to \Box \Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; xRz \Rightarrow \exists z_1 \in W \; yRz_1 \;\&\; zRz_1$
5. $\mathcal{F} \models \Diamond \top \Leftrightarrow \forall x \in W \; \exists y \in W \;\; xRy$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

1. $\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \ \ xRx$
2. $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \ \ xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz$
3. $\mathcal{F} \models p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y \in W \ \ xRy \Rightarrow yRx$
4. $\mathcal{F} \models \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \ \ xRy \ \& \ xRz \Rightarrow \exists z_1 \in W \ yRz_1 \ \& \ zRz_1$
5. $\mathcal{F} \models \Diamond\top \Leftrightarrow \forall x \in W \ \exists y \in W \ \ xRy$

Proof.

Рассмотрим эквивалентности (1), (2) и (5). $\Box$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$$

Для удобства перепишем эту формулу в эквивалентный вид $p \to \Diamond p$.

Proof.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{F} \models p \to \Diamond p$. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{x\}$, где $x \in W$.

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \ \ xRx$$

Для удобства перепишем эту формулу в эквивалентный вид $p \to \Diamond p$.

Proof.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{F} \models p \to \Diamond p$. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{x\}$, где $x \in W$. Тогда $\mathcal{M}, x \models p$ и $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$. Тогда найдется $y \in R(x)$, такой, что $\mathcal{M}, y \models p$.

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$$

Для удобства перепишем эту формулу в эквивалентный вид $p \to \Diamond p$.

Proof.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{F} \models p \to \Diamond p$. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{x\}$, где $x \in W$. Тогда $\mathcal{M}, x \models p$ и $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$. Тогда найдется $y \in R(x)$, такой, что $\mathcal{M}, y \models p$. Но p истинно только в x, тогда xRx. □

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$$

Proof.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ рефлексивная шкала и $\mathcal{F} \not\models p \to \Diamond p$.

$\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ рефлексивная шкала и $\mathcal{F} \not\models p \to \Diamond p$. Тогда найдется такая оценка ϑ, модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ и $x \in W$, что $\mathcal{M}, x \models p$ и $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond p$.

$\Box$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \ \ xRx$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ рефлексивная шкала и $\mathcal{F} \not\models p \to \Diamond p$. Тогда найдется такая оценка ϑ, модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta\rangle$ и $x \in W$, что $\mathcal{M}, x \models p$ и $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond p$. Из $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond p$ следует, что для любого $y \in R(x)$, $\mathcal{M}, y \not\models p$.

$\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to p \Leftrightarrow \forall x \in W \;\; xRx$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ рефлексивная шкала и $\mathcal{F} \not\models p \to \Diamond p$. Тогда найдется такая оценка ϑ, модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta\rangle$ и $x \in W$, что $\mathcal{M}, x \models p$ и $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond p$. Из $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond p$ следует, что для любого $y \in R(x)$, $\mathcal{M}, y \not\models p$. Так как $\mathcal{F}$ рефлексивная шкала, тогда xRx и $x \in R(x)$, тогда $\mathcal{M}, x \not\models p$. Противоречие. $\Box$

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$$

Аналогично, перепишем нашу формулу как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Proof.

$\square$

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$$

Аналогично, перепишем нашу формулу как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Proof.

$(\Rightarrow)$

$\Box$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$$

Аналогично, перепишем нашу формулу как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Proof.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ и $x, y, z \in W$, такие, что xRy и yRz. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{z\}$.

□

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \ \ xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz$$

Аналогично, перепишем нашу формулу как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ и $x, y, z \in W$, такие, что xRy и yRz. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{z\}$. Так как $xRyRz$, тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Diamond p$.

$\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$$

Аналогично, перепишем нашу формулу как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ и $x, y, z \in W$, такие, что xRy и yRz. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{z\}$. Так как $xRyRz$, тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Diamond p$. Тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$.

$\Box$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \ \ xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz$$

Аналогично, перепишем нашу формулу как $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ и $x, y, z \in W$, такие, что xRy и yRz. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) = \{z\}$. Так как $xRyRz$, тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Diamond p$. Тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$. Значит, найдется $x' \in R(x)$, что $\mathcal{M}, x' \models p$. Но p истинно только z, тогда xRz $\Box$

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это транзитивная шкала, ϑ — это оценка, модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ и $x \in W$.

$\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это транзитивная шкала, ϑ — это оценка, модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ и $x \in W$. Предположим, что $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Diamond p$. Тогда найдется $y \in R(x)$, что $\mathcal{M}, y \models \Diamond p$. Тогда найдется найдется $z \in R(x)$, что $\mathcal{M}, z \models p$. xRy и yRz, тогда xRz. $\Box$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \;\; xRy \; \& \; yRz \Rightarrow xRz$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это транзитивная шкала, ϑ — это оценка, модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ и $x \in W$. Предположим, что $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Diamond p$. Тогда найдется $y \in R(x)$, что $\mathcal{M}, y \models \Diamond p$. Тогда найдется найдется $z \in R(x)$, что $\mathcal{M}, z \models p$. xRy и yRz, тогда xRz. Значит, $\mathcal{M}, x \models \Diamond p$. $\Box$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Diamond\top \Leftrightarrow \forall x \in W \, \exists y \in W \;\; xRy$$

Proof.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{F} \models \Diamond\top$. Тогда $\mathcal{M}, x \models \Diamond\top$. Тогда найдется $y \in R(x)$, что $\mathcal{M}, y \models \top$. Так как x произвольный, то для каждого такого x найдется последователь. $\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке, тогда*

$$\mathcal{F} \models \Diamond\top \Leftrightarrow \forall x \in W \ \exists y \in W \ \ xRy$$

Proof.

$(\Leftarrow)$

$\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Diamond\top \Leftrightarrow \forall x \in W \ \exists y \in W \ \ xRy$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F}$ сериальна и при этом $\mathcal{M} \not\models \Diamond\top$. Тогда при некотором x, $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond\top$. То есть, $\mathcal{M}, x \models \neg\Diamond\top$. По эквивалентности, $\mathcal{M}, x \models \neg\neg\Box\neg\top$. $\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Diamond\top \Leftrightarrow \forall x \in W \; \exists y \in W \;\; xRy$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F}$ сериальна и при этом $\mathcal{M} \not\models \Diamond\top$. Тогда при некотором x, $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond\top$. То есть, $\mathcal{M}, x \models \neg\Diamond\top$. По эквивалентности, $\mathcal{M}, x \models \neg\neg\Box\neg\top$. Иными словами, $\mathcal{M}, x \models \Box\bot$. $\square$

Модальные формулы и свойства шкал

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — это шкала Крипке, тогда

$$\mathcal{F} \models \Diamond\top \Leftrightarrow \forall x \in W\ \exists y \in W\ \ xRy$$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{F}$ сериальна и при этом $\mathcal{M} \not\models \Diamond\top$. Тогда при некотором x, $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond\top$. То есть, $\mathcal{M}, x \models \neg\Diamond\top$. По эквивалентности, $\mathcal{M}, x \models \neg\neg\Box\neg\top$. Иными словами, $\mathcal{M}, x \models \Box\bot$. Откуда, $R(x) = \varnothing$. Но шкала сериальна. Противоречие. $\square$

Модально неопределимые свойства шкал

- Заметим, что не всякое свойство шкал является модально определимым.

Модально неопределимые свойства шкал

- Заметим, что не всякое свойство шкал является модально определимым.
- Покажем, что не существует модальной формулы ϕ, такой, что в шкале $\mathcal{F} \models \phi$ тогда и только тогда, когда отношение R иррефлексивно

Модально неопределимые свойства шкал

- Заметим, что не всякое свойство шкал является модально определимым.
- Покажем, что не существует модальной формулы ϕ, такой, что в шкале $\mathcal{F} \models \phi$ тогда и только тогда, когда отношение R иррефлексивно
- Для это введем понятие p-морфизма, естественного гомоморфизма шкал и моделей Крипке

p-морфизм шкал

Определение

p-морфизмом шкал Крипке называется отображение $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, *такое что:*

1. f — *монотонно,* $aR_1b \Rightarrow f(a)R_2f(b)$, *где* $a, b \in W_1$
2. f *обладает свойством поднятия, то есть,* $f(a)R_2c \Rightarrow \exists b \in W_1\ aR_1b \,\&\, f(b) = c$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, "R_1"] \arrow[d, mapsto] & \exists b \arrow[d, dashed, mapsto] \\ f(a) \arrow[r, "R_2"'] & c \end{tikzcd}$$

Определение

p-морфизмом шкал Крипке называется отображение $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$*, такое что:*

1. f *— монотонно,* $aR_1b \Rightarrow f(a)R_2f(b)$*, где* $a, b \in W_1$
2. f *обладает свойством поднятия, то есть,* $f(a)R_2c \Rightarrow \exists b \in W_1\ aR_1b \,\&\, f(b) = c$*:*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, "R_1"] \arrow[d, mapsto] & \exists b \arrow[d, dashed, mapsto] \\ f(a) \arrow[r, "R_2"'] & c \end{tikzcd}$$

Также нас будут интересовать сюръективные p-морфизмы. То есть такие $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$*, что* $\forall y \in \mathcal{F}_2\ \exists x \in \mathcal{F}_1\ \ f(x) = y$*. Обозначение* $f : \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$*.*

p-морфизм моделей

Определение

Пусть $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, \vartheta_1 \rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta_2 \rangle$ — это модели Крипке.

p-морфизм моделей

Определение

Пусть $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, \vartheta_1 \rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta_2 \rangle$ — это модели Крипке. p-морфизмом моделей Крипке $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ называется p-морфизм шкал $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ со следующим условием:

p-морфизм моделей

Определение

Пусть $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, \vartheta_1 \rangle$ *и* $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta_2 \rangle$ *— это модели Крипке. p-морфизмом моделей Крипке* $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *называется p-морфизм шкал* $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *со следующим условием:*

$$\mathcal{M}_1, w \models p \Leftrightarrow \mathcal{M}_1, f(w) \models p, \text{ для всех } w \in \mathcal{M}_2, \text{ где } p \text{ — это переменная.}$$

p-морфизм моделей

Определение

Пусть $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, \vartheta_1 \rangle$ *и* $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta_2 \rangle$ *— это модели Крипке. p-морфизмом моделей Крипке* $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *называется p-морфизм шкал* $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *со следующим условием:*

$$\mathcal{M}_1, w \models p \Leftrightarrow \mathcal{M}_1, f(w) \models p, \text{ для всех } w \in \mathcal{M}_2, \text{ где } p \text{ — это переменная.}$$

p-морфизмы позволяют отображать модели и шкалы, сохраняя истинность формул. Сформулируем лемму:

Лемма о p-морфизмах

Лемма

1. *Пусть* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ *— модели Крипке и* $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$*. Тогда* $\mathcal{M}_1, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, f(w) \models \phi$
2. *Пусть* $f : \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$*, тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_2)$

Докажем первый пункт

Лемма

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ *— модели Крипке и* $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. *Тогда* $\mathcal{M}_1, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, f(w) \models \phi$

Лемма о p-морфизмах

Докажем первый пункт

Лемма

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — модели Крипке и $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. Тогда $\mathcal{M}_1, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, f(w) \models \phi$

Индукция по построению формулы ϕ. Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Diamond\psi$. Покажем, что $\mathcal{M}_1, w \models \Diamond\psi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, f(w) \models \Diamond\psi$

Докажем первый пункт

Лемма

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — модели Крипке и $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. Тогда $\mathcal{M}_1, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, f(w) \models \phi$

Индукция по построению формулы ϕ. Рассмотрим случай, когда $\phi \leftrightharpoons \Diamond\psi$. Покажем, что $\mathcal{M}_1, w \models \Diamond\psi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, f(w) \models \Diamond\psi$

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{M}_1, w \models \Diamond\psi$. Тогда найдется $u \in R_1(w)$ такой, что $\mathcal{M}_1, u \models \psi$. По предположению индукциию, $\mathcal{M}_2, f(u) \models \psi$. По монотонности, $wRu \Rightarrow f(w)R_2f(u)$. Тогда $\mathcal{M}_2, f(w) \models \Diamond\psi$. $\square$

Докажем первый пункт

Лемма

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — модели Крипке и $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. Тогда $\mathcal{M}_1, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_1, f(w) \models \phi$

Proof.

$(\Leftarrow)$

$\square$

Лемма о p-морфизмах

Докажем первый пункт

Лемма

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — модели Крипке и $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. Тогда
$\mathcal{M}_1, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}_1, f(w) \models \phi$

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{M}_2, f(w) \models \Diamond\psi$. Тогда $w' \in R_2(f(w))$, что $\mathcal{M}_2, w' \models \psi$. $f(w) R_2 w'$, значит найдется $u \in W_1$, что $f(u) = w'$ и wRu. По предположению индукции, $\mathcal{M}_1, u \models \psi$. Тогда $\mathcal{M}_1, w \models \Diamond\psi$. $\square$

Лемма о p-морфизмах

Лемма

Пусть $f : \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_2)$

$\square$

Лемма о p-морфизмах

Лемма

Пусть $f : \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_2)$

Proof.

Пусть $\mathcal{F}_2 \not\models \phi$. Тогда найдется такая оценка ϑ и $y \in W$, что в модели $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta \rangle$ мы имеем $\mathcal{M}_2, y \not\models \phi$. То есть, $\mathcal{M}_2, y \models \neg\phi$.

$\square$

Лемма о p-морфизмах

Лемма

Пусть $f : \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_2)$

Proof.

Пусть $\mathcal{F}_2 \not\models \phi$. Тогда найдется такая оценка ϑ и $y \in W$, что в модели $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta \rangle$ мы имеем $\mathcal{M}_2, y \not\models \phi$. То есть, $\mathcal{M}_2, y \models \neg\phi$. Введем на $\mathcal{F}_1$ оценку $\varrho(p) = f^{-1}(\vartheta(p))$. В силу сюръективности f, найдется $x \in W_1$, что $f(x) = y$. $\square$

Лемма о p-морфизмах

Лемма

Пусть $f : \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_2)$

Proof.

Пусть $\mathcal{F}_2 \not\models \phi$. Тогда найдется такая оценка ϑ и $y \in W$, что в модели $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, \vartheta \rangle$ мы имеем $\mathcal{M}_2, y \not\models \phi$. То есть, $\mathcal{M}_2, y \models \neg\phi$. Введем на $\mathcal{F}_1$ оценку $\varrho(p) = f^{-1}(\vartheta(p))$. В силу сюръективности f, найдется $x \in W_1$, что $f(x) = y$. Откуда $\mathcal{M}_1, x \models \neg\phi$. Значит, $\mathcal{M}_1, x \not\models \phi$. $\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

$\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

Proof.

Рассмотрим шкалы $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ и $\langle \{*\}, R = \{(*, *)\} \rangle$.

$\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

Proof.

Рассмотрим шкалы $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ и $\langle \{*\}, R = \{(*, *)\} \rangle$. Введем $f : \langle \mathbb{N}, < \rangle \to \langle \{*\}, R \rangle$, где $f : n \mapsto *$.

$\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

Proof.

Рассмотрим шкалы $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ и $\langle \{*\}, R = \{(*, *)\} \rangle$. Введем $f : \langle \mathbb{N}, < \rangle \to \langle \{*\}, R \rangle$, где $f : n \mapsto *$. Легко видеть, что f монотонно и сюръективно:

$\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

Proof.

Рассмотрим шкалы $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ и $\langle \{*\}, R = \{(*,*)\} \rangle$. Введем $f : \langle \mathbb{N}, < \rangle \to \langle \{*\}, R \rangle$, где $f : n \mapsto *$. Легко видеть, что f монотонно и сюръективно: если $n < m$, то $f(n) = *$ и $f(m) = *$, а $*R*$. Также f обладает свойством поднятия.

$\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

Proof.

Рассмотрим шкалы $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ и $\langle \{*\}, R = \{(*, *)\} \rangle$. Введем $f : \langle \mathbb{N}, < \rangle \to \langle \{*\}, R \rangle$, где $f : n \mapsto *$. Легко видеть, что f монотонно и сюръективно: если $n < m$, то $f(n) = *$ и $f(m) = *$, а $*R*$. Также f обладает свойством поднятия. Пусть $f(n)R*$ Положим $m := n + 1$. Тогда $n < m$ и $f(m) = *$.

$\square$

Невыразимость иррефлексивности в модальном языке

Лемма

Не существует модальной формулы ϕ, такой, что для любой шкалы $\mathcal{F}$ имеет место

$$\mathcal{F} \models \phi \Leftrightarrow \forall x \in W \neg(xRx)$$

Proof.

Рассмотрим шкалы $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ и $\langle \{*\}, R = \{(*, *)\} \rangle$. Введем $f : \langle \mathbb{N}, < \rangle \to \langle \{*\}, R \rangle$, где $f : n \mapsto *$. Легко видеть, что f монотонно и сюръективно: если $n < m$, то $f(n) = *$ и $f(m) = *$, а $*R*$. Также f обладает свойством поднятия. Пусть $f(n)R*$ Положим $m := n + 1$. Тогда $n < m$ и $f(m) = *$. По лемме о p-морфизмах, $\mathrm{Log}(\langle \mathbb{N}, < \rangle) \subseteq \mathrm{Log}(\langle \{*\}, R \rangle)$. При этом первая шкала иррефлексивна, а вторая — нет. $\square$

На следующей лекции мы

1. Введем понятие (нормальной) модальной логики

На следующей лекции мы

1. Введем понятие (нормальной) модальной логики
2. Скажем, что такое полная по Крипке логика

На следующей лекции мы

1. Введем понятие (нормальной) модальной логики
2. Скажем, что такое полная по Крипке логика
3. Докажем теорему корректности, которая утверждает, что логика произвольного класса шкал является нормальной модальной логикой

На следующей лекции мы

1. Введем понятие (нормальной) модальной логики
2. Скажем, что такое полная по Крипке логика
3. Докажем теорему корректности, которая утверждает, что логика произвольного класса шкал является нормальной модальной логикой
4. Сформулируем минимальную нормальную модальную логику, логику $\mathbf{K}$

На следующей лекции мы

1. Введем понятие (нормальной) модальной логики
2. Скажем, что такое полная по Крипке логика
3. Докажем теорему корректности, которая утверждает, что логика произвольного класса шкал является нормальной модальной логикой
4. Сформулируем минимальную нормальную модальную логику, логику **K**
5. Докажем теорему полноты для **K**: минимальная нормальная модальная логика является логикой класса всех шкал