Введение в модальную логику, Лекция 5

Даня Рогозин
МГУ, Serokell

Computer Science Club

На прошлой лекции мы

- Определили, что такое фининтная аппроксимируемость
- Доказали разрешимость логик **T**, **K**4, **D**, **S**4, **S**5, **S**4.2 и **GL**

В этот раз мы

- Рассмотрим пример задачи поиска модальной логики конкретной шкалы
- Далее мы поговорим более общими словами о следующих аспектах модальной логики:
- Связь модальной логики с топологией
- Модальная логика применительно к доказуемости в арифметических теориях
- Общими словами поговорим об актуальном положении дел в модальной логике

Задача

Наша текущая задача найти модальную логику действительных чисел с отношением $\leqslant$. То есть как выглядит $\mathcal{L} = \mathrm{Log}(\mathbb{R}, \leqslant)$?
Рассмотрим формулу следующего вида:

$$\mathbf{ALin} = \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p)$$

Определение

$\mathbf{S}4.3 = \mathbf{S}4 \oplus \mathbf{ALin}$

Лемма

1. $\mathcal{F} \models \mathbf{ALin} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in W \ \ (xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRz \ \vee \ zRy)$
2. $\mathbf{ALin}$ *является канонической формулой.*
3. $\mathbf{S}4.3 = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех линейных предпорядков*

Финитная аппроксимируемость **S**4.3

Лемма

S4.3 *финитно аппроксимируема*

Proof.

Доказывается аналогично финитной аппроксимируемости логики **S**4.2. Заметим, что в если $\mathcal{F} \models$ **S**4.3, то отношение в $\mathcal{F}\langle w \rangle$, где $w \in \mathcal{F}$, будет обладать свойством $\forall x, y \in R(x)\ (xRy \vee yRx)$. $\square$

Сгустки и остовы

Определение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это предпорядок. Введем отношение (эквивалентности):

$$w \sim_R v \Leftrightarrow wRv \ \& \ vRw$$

Введем отношение на классах $[x]_{\sim_R} \leqslant_R [y]_{\sim_R} \Leftrightarrow xRy$. Классы эквивалентности $[x]_{\sim_R}$ называются сгустками, а шкала $\langle W/\sim_R, \leqslant_R \rangle$ остовом шкалы R.

Нетрудно проверяется следующий факт:

Предложение

$\langle W/\sim_R, \leqslant_R \rangle$ — частичный порядок.

Заметим также, что если исходный предпорядок был линеен, то его остов будет линейным предпорядком.

Логика действительной прямой

Следствием из финитной аппроксимируемости **S**4.3 и предыдущего предложения является следующий факт:

Предложение

$\mathbf{S}4.3 = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс таких конечных предпорядков* $\mathcal{F}$, *остов которых является линейным порядком.*

Дальнейшие действия:

- Показать, что для каждого такого конечного предпорядка $\mathcal{F}$, остов которого линеен, можно построить p-морфизм $f : \langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.
- Тогда $\mathrm{Log}(\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F})$. То есть, если $\phi \in \mathrm{Log}(\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle)$, тогда $\phi \in \mathrm{Log}(\mathcal{F})$. Тогда $\mathbf{S}4.3 \vdash \phi$ по предложению выше.

Логика действительной прямой

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это конечный предпорядок, остов которого линеен. Тогда существует p-морфизм $f : \langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle \twoheadrightarrow \mathcal{F}$

Proof.

Пусть $\mathcal{F}_{\sim_R}$ — линейный остов конечного предпорядка $\mathcal{F}$. Рассмотрим три случая:

- $|\mathcal{F}_{\sim_R}| = 1$
- $|\mathcal{F}_{\sim_R}| = 2$
- $|\mathcal{F}_{\sim_R}| \geqslant 2$

Соответственно, нам нужно построить три p-морфизма $\square$

Логика действительной прямой

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это конечный предпорядок, остов которого линеен. Тогда существует p-морфизм $f : \langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle \twoheadrightarrow \mathcal{F}$

Пусть $|\mathcal{F}_{\sim_R}| = 1$. Заметим, что если $|\mathcal{F}_{\sim_R}| = 1$, что R совпадает с $W \times W$.

Proof.

Пусть $W = \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$. Рассмотрим следующее отображение $f : \mathbb{R} \to W$:

$$f(x) = \begin{cases} w_{x \bmod n}, & x \in \mathbb{N} \\ w_0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} \end{cases}.$$

Монотонность отображения очевидна. Сюръективность тоже проверяется нетрудно. Проверим свойство поднятия. Пусть wRw' и $f(x) = w$. В качестве y, такого, что $x \leqslant y$ и $f(y) = w'$ при $w' = w_i$ положим k, такое, что $k > x$ и $k \equiv i \mod n$. □

Логика действительной прямой

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это конечный предпорядок, остов которого линеен. Тогда существует p-морфизм $f : \langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle \twoheadrightarrow \mathcal{F}$

Пусть $|\mathcal{F}_{\sim_R}| = 2$. Тогда W разбивается на два сгустка $C_1 = \{w_0, \ldots, w_{p-1}\}$ и $C_2 = \{u_0, \ldots, w_{q-1}\}$.

Proof.

Рассмотрим две монотонно возрастающие последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Определим $f : \mathbb{R} \to W$ (которое p-морфно):

$$f(x) = \begin{cases} w_{n \bmod p}, \ x < 0 \ \& \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ a_n = x \\ w_0, \ x < 0 \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \neq x \\ u_{n \bmod q}, \ x \geqslant 0 \ \& \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ b_n = x \\ u_0, \ x \geqslant 0 \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ b_n \neq x \end{cases}$$

□

Логика действительной прямой

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это конечный предпорядок, остов которого линеен. Тогда существует p-морфизм $f : \langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle \twoheadrightarrow \mathcal{F}$

Пусть $|\mathcal{F}_{\sim_R}| \geqslant 2$. Тогда $W/{\sim_R} = \{C_0, \ldots, C_{k+1}\}$, где $|C_i| = d_i$ и $C_i = \{w_0^i, \ldots, w_{d_i-1}^i\}$.

Proof.

Разобьем $\mathbb{R}$ на подмножества $V_0, \ldots, V_{k+1}$ следующим образом. $V_0 := (-\infty, 0)$, $V_{m+1} = [m+1, +\infty)$. Если $1 \leqslant i \leqslant m$, то $V_i = [i-1, i)$. Для каждого из множеств зададим последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}^i$ таким образом, что при $0 \leqslant i \leqslant m$ $a_n^i = i - \frac{1}{n}$, и $a_n^{m+1} = m + n$. Для $x \in V_i$ мы определим p-морфизм

$$f(x) = \begin{cases} w_{n \bmod d_i}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ a_n^i = x \\ w_0, \ x \notin \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}^i \end{cases}$$

□

Топологическая семантика модальной логики

- Одной из наиболее любопытных ветвей математической логики является пространственная логика, которая изучает логики пространственных структур
- В данном контексте мы рассмотрим топологическую семантику модальной логики
- В рамках этой семантики мы можем применять модальную логику к топологии и изучать топологические пространства, описывая их в модальном языке
- В этом кратком обзоре мы посмотрим на топологические модели модального языка и сформулируем теорему Маккинси-Тарского: логика **S**4 является логикой класса всех топологических пространств

Топологическое пространство

Вспомним определение топологического пространства

Определение

Топологическим пространством называется пара $\mathcal{X} = \langle X, \tau \rangle$, где X — это непустое множество, а τ — это семейство подмножеств со следующим условиями:

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. *Если* $A, B \in \tau$, *то* $A \cap B \in \tau$
3. *Пусть* I *— это индексное множество, и для каждого* $i \in I$, $A_i \in \tau$. *Тогда* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$
4. *Если* $A \in \tau$, *то говорят, что* A *открытое множество.*

Часто топологические пространства определяют через *базу топологии* $\mathcal{B}$: набор открытых подмножеств $\mathcal{B}$, таких, что если $A \in \tau$, то найдется такое семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ и при каждом $i \in I$ $A_i \in \mathcal{B}$, что $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Примеры топологических пространств

1. Тривиальные примеры
   - Дискретное пространство, в котором любое множество открыто. База дискретной топологии — это одноточечные подмножества
   - Антидискретное пространство: открыты только само множество и пустое
2. Вещественная прямая: база естественной топологии на $\mathbb{R}$ — это открытые интервалы (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$
3. Метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$: база топологии — это открытые шары. То есть, подмножества вида $\mathrm{U}_\varepsilon^x = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и $x \in X$.

Внутренность множества

Определение

Пусть $\mathcal{X} = \langle X, \tau \rangle$ *— это топологическое пространство. Введем оператор* $I : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, *что*

$$I(A) = \bigcup \{B \in \tau \mid B \subseteq A\}$$

Такие операторы называются операторами взятия внутренности, а множество $I(A)$ *внутренностью множества* A.

Внутренность множества

Определение

Пусть $\mathcal{X} = \langle X, \tau \rangle$ *— это топологическое пространство. Введем оператор* $I : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, *что*

$$I(A) = \bigcup \{B \in \tau \mid B \subseteq A\}$$

Такие операторы называются операторами взятия внутренности, а множество $I(A)$ *внутренностью множества* A.

Легко видеть, что

1. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{I}(A) \subseteq \mathrm{I}(B)$
2. $\mathrm{I}(A) \subseteq A$
3. $\mathrm{I}(A) = \mathrm{I}(\mathrm{I}(A))$
4. $\mathrm{I}(A \cap B) = \mathrm{I}(A) \cap \mathrm{I}(B)$
5. Множество открыто тогда и только тогда, когда $\mathrm{I}(A) = A$

Топологическая модель

Определение

Пусть $\mathcal{X} = \langle X, \tau \rangle$ — это топологическое пространство. Тогда топологической моделью называется пара $\mathcal{M} = \langle \mathcal{X}, \vartheta \rangle$, где $\vartheta : \mathsf{PV} \to \mathcal{P}(X)$, такая, что

1. $\mathcal{M}, x \models p \Leftrightarrow p \in \vartheta(p)$
2. $\mathcal{M}, x \not\models \bot$
3. $\mathcal{M}, x \models \phi \to \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \models \phi \Rightarrow \mathcal{M}, x \models \psi$
4. $\mathcal{M}, x \models \Box\phi \Leftrightarrow \exists U \in \tau \ \ (x \in U \ \& \ \forall y \in U \ \ \mathcal{M}, y \models \phi)$

Определения истинности в топологической модели, общезначимости в топологическом пространстве и в классе пространств аналогичны соответствующим определениям для моделей и шкал Крипке.

Корректность в случае топологической семантики

В случае топологической семантики теорема корректности имеет следующую формулировку:

Теорема

Пусть $\mathbb{X}$ — это класс топологических пространств, тогда $\mathbf{S}4 \subseteq \mathrm{Log}(\mathbb{X})$

Покажем для примера общезначимость формулы **A**4, то есть, $\mathbb{X} \models \Box p \to \Box\Box p$

Proof.

Пусть $\mathcal{X}$ — это топологическое пространство, ϑ — это оценка, $x \in X$, такие, что $\mathcal{M}, x \models \Box p$, где $\mathcal{M} = \langle \mathcal{X}, \vartheta \rangle$. Из $\mathcal{M}, x \models \Box p$ следует, что найдется окрестность точки x U_x, что для любого $y \in U_x$, $\mathcal{M}, y \models p$. Тогда $\mathcal{M}, y \models \Box p$. Откуда $\mathcal{M}, x \models \Box\Box p$ $\Box$

Теорема Маккинси-Тарского

В случае топологической семантики модальной логики, основопологающими являются результаты Маккинси и Тарского.

Теорема

- $\mathbf{S4} = \mathrm{Log}(\mathbb{T})$, *где* $\mathbb{T}$ *— это класс всех топологических пространств.*
- *Пусть* $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{S4}$, *тогда найдется класс топологических пространств* $\mathbb{X}$, *что* $\mathrm{Log}(\mathbb{X}) = \mathbf{L}$
- $\mathbf{S4} = \mathrm{Log}(\mathbb{M})$, *где* $\mathbb{M}$ *— это класс всех метрических пространств.*

Арифметика Пеано

Определение

Арифметика Пеано (PA) *— это теория первого порядка с равенством в сигнатуре* $\Omega = \langle 0, S, +, \cdot \rangle$ *со следующим списком аксиом:*

1. $\forall x \, \neg(S(x) = 0)$
2. $\forall x, y \, (S(x) = S(y) \to x = y)$
3. $\forall x \, (x \neq 0 \to \exists y \, (S(y) = x))$
4. $\forall x \, (x + 0 = x)$
5. $\forall x, y \, (x + S(y) = S(x + y))$
6. $\forall x \, (x \cdot 0 = 0)$
7. $\forall x, y \, (x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$
8. $A(0) \wedge \forall x \, (A(x) \to A(S(x))) \to \forall x \, A(x)$

Нумерация синтаксиса

Определение

Гёделева нумерация — это отображение вида $\gamma : \mathrm{Term}_\Omega \cup \mathrm{Form}_\Omega \to \mathbb{N}$. *Пусть* t *и* A *— это арифметические терм и формула, тогда* $\gamma(t)$ *и* $\gamma(A)$ *мы будем обозначать как* $\lceil t \rceil$ *и* $\lceil A \rceil$ *соответственно.*

Определение

Предикат доказательства — это двухместный предикат вида $\mathrm{Prf}(x, y)$, *читаемая как "*x *является гёделевым номером доказательства формулы* x. *При этом ясно, что:*

1. *Если последовательность формул* $A_1, \ldots, A_n$ *— это доказательство формулы* A, *то* $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prf}(\lceil A_1, \ldots, A_n \rceil, \lceil A \rceil)$
2. *Если* n *не является номером доказательства формулы* A, *то* $\mathbf{PA} \vdash \neg\, \mathrm{Prf}(\bar{n}, \lceil A \rceil)$

Предикат доказуемости и его свойства

Определение

Предикат доказуемости — это формула вида $\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(y) := \exists x\ \mathrm{Prf}(x, y)$.

Следующие свойства предиката доказуемости называются условиями Гильберта-Бернайса-Лёба:

Лемма

1. $\mathbf{PA} \vdash A \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \urcorner)$
2. $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \to B \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner B \urcorner))$
3. $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \urcorner))$

Можно заметить, что первое условие напоминает правило усиления, а вторые два — формулы **AK** и **A**4.

Лемма о неподвижной точке и первая теорема Гёделя о неполноте

Лемма

Для каждой арифметической формулы с одной свободной переменной $B(x)$ найдется такая замкнутная формула A, что

$$\mathbf{PA} \vdash A \leftrightarrow B(\lceil A \rceil)$$

Первая теорема Гёделя доказывается в несколько строк из условий Гильберта-Бернайса-Лёба и леммы о неподвижной точки

Теорема

Пусть A — это арифметическое предложение, такое, что $\mathbf{PA} \vdash A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\lceil A \rceil))$. Если $\mathbf{PA}$ непротиворечива, то $\mathbf{PA} \nvdash A$

Вторая теорема о неполноте

Определение

Формула, выражающая непротиворечивость, имеет следующий вид $\mathsf{Con}_{\mathbf{PA}} := \neg\,\mathsf{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$. *Здесь* $\bot$ *— это заведомо ложная формула, скажем* $0 = 1$.

Теорема

$\mathbf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathbf{PA}}$

Вторая теорема Гёделя о неполноте может иметь следующее обобщение.

Теорема Лёба

Теорема Лёба устанавливает следующую взаимосвязь между арифметическим утверждением и ее собственной доказуемостью:

Теорема

$\mathbf{PA} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\lceil A \rceil) \to A$

Вторая теорема Гёделя о неполноте получается из теоремы Лёба, если в качестве A положить $\bot$:

$$\mathbf{PA} \vdash \bot \Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pf}_{\mathbf{PA}}(\lceil \bot \rceil) \to \bot \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{PA} \vdash \bot \Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash \neg\, \mathrm{Pf}_{\mathbf{PA}}(\lceil \bot \rceil) \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{PA} \vdash \bot \Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$$

Теорема Лёба

Более того, теорема Лёба может быть сама формализована в **PA**:

Теорема

Пусть A — это арифметическое предложение, тогда:

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \urcorner) \to A \urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner A \urcorner)$$

Теперь нам совершенно ясно, что теорема Лёба выглядит аналогично формуле Лёба, выражающей транзитивность и нётеровость шкалы. Напомним, что она имеет вид $\Box(\Box\phi \to \phi) \to \Box\phi$. Теперь придадим этой аналогии более точный смысл.

Арифметическая реализация

Определение

Пусть ClFm_Ω *— это множество замкнутых арифметических формул и* $r : \mathbb{V} \to \mathsf{ClFm}_\Omega$ *— это интерпретация переменных. Арифметическая реализация — это функция* $\rho : \mathbf{Fm} \to \mathsf{ClFm}_\Omega$*, реализованная следующим образом:*

1. $\rho(p) = r(p)$
2. $\rho(\bot) = \bot$
3. $\rho(\phi \to \psi) = \rho(\phi) \to \rho(\psi)$
4. $\rho(\Box\phi) = \mathsf{Pr}_{\mathbf{PA}}(\lceil\rho(\phi)\rceil)$

Теорема Соловея

Теорема

Для любой арифметической реализации ρ имеет место следующая эквивалентность:

$$\mathbf{GL} \vdash \phi \Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash \rho(\phi)$$

- Корректность довольно проста: модальная часть корректность следует из теоремы Лёба и условий Гильберта-Бернайса-Лёба
- Полнота сложнее, мы ее опустим
- Таким образом, формула принадлежит логике класса всех транзитивных нётеровых шкал тогда и только тогда, когда всякая её арифметическая реализация доказуема в арифметике Пеано

Направления развития

- Модальности в логиках, основанных на неклассических логиках
- Окрестностная и топологическая семантики
- Теория доказательств в модальных логиках
- Соотношения между модальной логикой и теорией моделей
- Алгебраические вопросы модальных логик

Области применения

- Верификация программ
- Теория доказательств и ординальный анализ
- Пространственные логики
- Дескрипционные логики (базы данных, представление знаний)
- Эпистемические логики (искусственный интеллект, вопросы обмена информации, коммуникационные протоколы)
- Соответствие Карри-Говарда для конструктивных модальных логик (функциональное программирование)