Алгоритмическая теория игр
Лекция 10

М.Н. Вялый

Лекции в Computer Science club (Санкт-Петербург), 2019

Расстояния до терминала как мера успешности стратегии

Локально-глобальное свойство

Теорема

Пусть стратегия x не допускает локальных улучшений. Тогда на этой стратегии достигается глобальный максимум вектора расстояний.

Предварительные замечания

1. С учётом препроцессинга для неулучшаемой стратегии все расстояния до терминала больше $-\infty$ (иначе Макс переключится на ход в терминал).
2. Достаточно рассмотреть только каноническую форму.

Локально-глобальное свойство

Теорема

Пусть стратегия x не допускает локальных улучшений. Тогда на этой стратегии достигается глобальный максимум вектора расстояний.

Предварительные замечания

1. С учётом препроцессинга для неулучшаемой стратегии все расстояния до терминала больше $-\infty$ (иначе Макс переключится на ход в терминал).
2. Достаточно рассмотреть только каноническую форму.

Локально-глобальное свойство

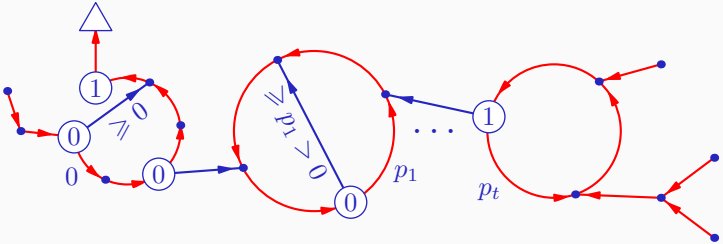
Теорема

Пусть стратегия x не допускает локальных улучшений. Тогда на этой стратегии достигается глобальный максимум вектора расстояний.

Предварительные замечания

1. С учётом препроцессинга для неулучшаемой стратегии все расстояния до терминала больше $-\infty$ (иначе Макс переключится на ход в терминал).
2. Достаточно рассмотреть только каноническую форму.

Каноническая форма модифицированной игры



$$p_0 = 0 < p_1 \leq \cdots \leq p_t$$

Простой случай

Обозначения

Расстояние от вершины v до терминала относительно канонических весов в стратегическом графе G_x обозначаем $\rho(x)_v$. Цену игры в позиции v обозначаем $p(v)$.

Утверждение

Если $\rho(x)_v = +\infty$, то из вида глобального максимума (для канонической игры) следует, что $\rho(x)_v = \rho_v^{\max}$ (и $p(v) > 0$).

Глобальный максимум

$\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$.

Простой случай

Обозначения

Расстояние от вершины v до терминала относительно канонических весов в стратегическом графе G_x обозначаем $\rho(x)_v$. Цену игры в позиции v обозначаем $p(v)$.

Утверждение

Если $\rho(x)_v = +\infty$, то из вида глобального максимума (для канонической игры) следует, что $\rho(x)_v = \rho_v^{\max}$ (и $p(v) > 0$).

Глобальный максимум

$\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$.

Основная лемма

Определения

$V_f = \{v : \rho(x)_v < +\infty\}$.

$V_f^+ = \{v \in V_f : p(v) > 0\}$.

Лемма

$V_f^+ = \varnothing$ для неулучшаемой стратегии.

План доказательства

В предположении $V_f^+ \neq \varnothing$ выберем $v = \arg\min\limits_{u \in V_f^+} \rho(x)_u$. На кратчайшем пути из v в $\triangle$ найдём ближайшую к v позицию Макса v' и в этой позиции выполним локальное улучшение.

Основная лемма

Определения

$V_f = \{v : \rho(x)_v < +\infty\}$.

$V_f^+ = \{v \in V_f : p(v) > 0\}$.

Лемма

$V_f^+ = \varnothing$ для неулучшаемой стратегии.

План доказательства

В предположении $V_f^+ \neq \varnothing$ выберем $v = \arg\min\limits_{u \in V_f^+} \rho(x)_u$. На кратчайшем пути из v в $\triangle$ найдём ближайшую к v позицию Макса v' и в этой позиции выполним локальное улучшение.

Основная лемма

Определения

$V_f = \{v : \rho(x)_v < +\infty\}$.

$V_f^+ = \{v \in V_f : p(v) > 0\}$.

Лемма

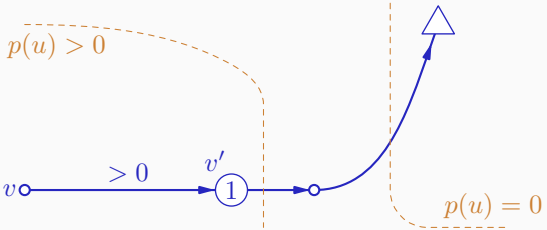
$V_f^+ = \varnothing$ для неулучшаемой стратегии.

План доказательства

В предположении $V_f^+ \neq \varnothing$ выберем $v = \arg\min\limits_{u \in V_f^+} \rho(x)_u$. На кратчайшем пути из v в $\triangle$ найдём ближайшую к v позицию Макса v' и в этой позиции выполним локальное улучшение.

Выбор позиции для локального улучшения

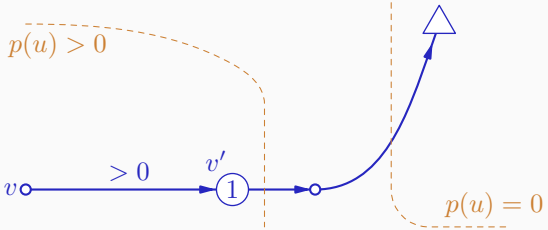
Переход от положительной цены к нулевой в канонической игре возможен только на ходе Макса. На кратчайшем пути из $v \in V_f^+$ в $\triangle$ такой переход должен произойти. Поэтому v' существует и $p(v') > 0$.



Свойства позиции v'

$s\colon V_1 \to V \cup \{\triangle\}$ — каноническая стратегия Макса, $v^* = s(v')$.

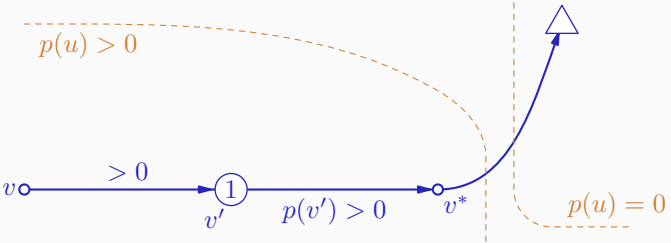
1. $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'}$. (До v' ходы делает Мин, их веса положительные в канонической игре.)
2. $x(v') \neq v^*$. Иначе противоречие с минимальностью: $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'} = p(v') + \rho(x)_{v^*} > \rho(x)_{v^*}$.
3. $\rho(x)_{v'} \leqslant \rho(x)_{v^*}$. Иначе $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'} > \rho(x)_{v^*}$.



Свойства позиции v'

$s\colon V_1 \to V \cup \{\triangle\}$ — каноническая стратегия Макса, $v^* = s(v')$.

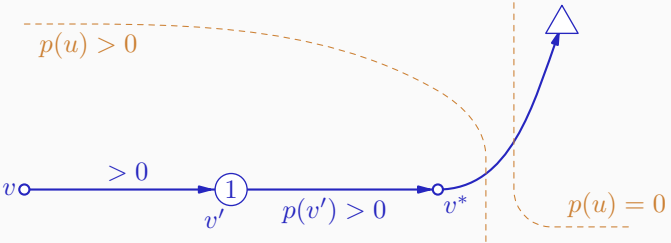
1. $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'}$. (До v' ходы делает Мин, их веса положительные в канонической игре.)
2. $x(v') \neq v^*$. Иначе противоречие с минимальностью: $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'} = p(v') + \rho(x)_{v^*} > \rho(x)_{v^*}$.
3. $\rho(x)_{v'} \leqslant \rho(x)_{v^*}$. Иначе $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'} > \rho(x)_{v^*}$.



Свойства позиции v'

$s\colon V_1 \to V \cup \{\triangle\}$ — каноническая стратегия Макса, $v^* = s(v')$.

1. $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'}$. (До v' ходы делает Мин, их веса положительные в канонической игре.)
2. $x(v') \neq v^*$. Иначе противоречие с минимальностью: $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'} = p(v') + \rho(x)_{v^*} > \rho(x)_{v^*}$.
3. $\rho(x)_{v'} \leqslant \rho(x)_{v^*}$. Иначе $\rho(x)_v \geqslant \rho(x)_{v'} > \rho(x)_{v^*}$.



Локальное улучшение в v'

Выполнены неравенства $x(v') \neq s(v')$ и $\rho(x)_{v'} \leqslant \rho(x)_{v^*}$.

Меняем стратегию: $x'(v') = v^* = s(v')$.

$$\rho(x')_{v'} = p(v') + \rho(x')_{v^*} > \rho(x)_{v^*} \geqslant \rho(x)_{v'},$$

что и означает локальное улучшение в позиции v'.

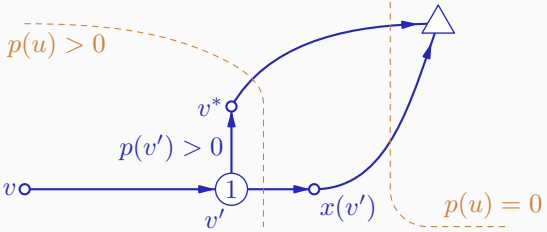
Локальное улучшение в v'

Выполнены неравенства $x(v') \neq s(v')$ и $\rho(x)_{v'} \leqslant \rho(x)_{v^*}$.

Меняем стратегию: $x'(v') = v^* = s(v')$.

$$\rho(x')_{v'} = p(v') + \rho(x')_{v^*} > \rho(x)_{v^*} \geqslant \rho(x)_{v'},$$

что и означает локальное улучшение в позиции v'.



Завершение доказательства теоремы

Глобальный максимум

$\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$.

1. Из основной леммы следует, что для всех $v \in V_f$ выполняется $p(v) = 0$.
2. Если в позиции Макса расстояние до терминала < 0, то возможно локальное улучшение (выбираем ход в терминал). Из вида глобального максимума следует, что для неулучшаемой стратегии это расстояние неположительно, то есть равно 0.
3. Ходы из позиций Мина имеют вес $\geqslant 0$ (минимум весов равен 0). Поэтому и расстояние от позиции Мина до терминала неотрицательное, а значит, нулевое из вида глобального максимума.

Завершение доказательства теоремы

Глобальный максимум

$\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$.

1. Из основной леммы следует, что для всех $v \in V_f$ выполняется $p(v) = 0$.
2. Если в позиции Макса расстояние до терминала < 0, то возможно локальное улучшение (выбираем ход в терминал). Из вида глобального максимума следует, что для неулучшаемой стратегии это расстояние неположительно, то есть равно 0.
3. Ходы из позиций Мина имеют вес $\geqslant 0$ (минимум весов равен 0). Поэтому и расстояние от позиции Мина до терминала неотрицательное, а значит, нулевое из вида глобального максимума.

Завершение доказательства теоремы

Глобальный максимум

$\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$.

1. Из основной леммы следует, что для всех $v \in V_f$ выполняется $p(v) = 0$.
2. Если в позиции Макса расстояние до терминала < 0, то возможно локальное улучшение (выбираем ход в терминал). Из вида глобального максимума следует, что для неулучшаемой стратегии это расстояние неположительно, то есть равно 0.
3. Ходы из позиций Мина имеют вес $\geqslant 0$ (минимум весов равен 0). Поэтому и расстояние от позиции Мина до терминала неотрицательное, а значит, нулевое из вида глобального максимума.

Вероятностный алгоритм поиска оптимальной стратегии

Общая схема алгоритма

Найти знак цены игры (G, w, v_0).

1° : Преобразовать веса $w'(u, v) = 2nw(u, v) - 1$.

Общая схема алгоритма

Найти знак цены игры (G, w, v_0).

1° : Преобразовать веса $w'(u, v) = 2nw(u, v) - 1$.

2° : Найти в ограничении графа G на ходы Мина компоненты, которые содержат циклы отрицательного веса. Найти множество вершин M, из которых достижимы эти компоненты. Если M достижимо из v_0, то $\mathrm{val}(v_0) < 0$. Иначе удалить из G те позиции, из которых Мин достигает M и получить граф G'.

Общая схема алгоритма

Найти знак цены игры (G, w, v_0).

1° : Преобразовать веса $w'(u, v) = 2nw(u, v) - 1$.

2° : Найти в ограничении графа G на ходы Мина компоненты, которые содержат циклы отрицательного веса. Найти множество вершин M, из которых достижимы эти компоненты. Если M достижимо из v_0, то $\mathrm{val}(v_0) < 0$. Иначе удалить из G те позиции, из которых Мин достигает M и получить граф G'.

3° : Расширить граф G' добавлением терминальной позиции и ходов из позиций Макса в эту позицию. Получить расширенный граф $G_\triangle$ с весовой функцией $w_\triangle$.

Общая схема алгоритма

Найти знак цены игры (G, w, v_0).

3° : Расширить граф G' добавлением терминальной позиции и ходов из позиций Макса в эту позицию. Получить расширенный граф $G_\triangle$ с весовой функцией $w_\triangle$.

4° : В качестве начальной стратегии Макса взять осторожную стратегию $x_0(v) = \triangle$. Применить процедуру поиска глобального максимума $BV(G_\triangle, x_0)$, используя весовую функцию $w_\triangle$. Результат обозначаем x^*.

Общая схема алгоритма

Найти знак цены игры (G, w, v_0).

3° : Расширить граф G' добавлением терминальной позиции и ходов из позиций Макса в эту позицию. Получить расширенный граф $G_\triangle$ с весовой функцией $w_\triangle$.

4° : В качестве начальной стратегии Макса взять осторожную стратегию $x_0(v) = \triangle$. Применить процедуру поиска глобального максимума $BV(G_\triangle, x_0)$, используя весовую функцию $w_\triangle$. Результат обозначаем x^*.

5° : Вычислить вектор расстояний $\rho(x^*)$. Если $\rho(x^*)_{v_0} = +\infty$, то цена позиции v_0 объявляется положительной. В противном случае, цена неположительная.

Свойства алгоритма

1. Корректность (по модулю корректности BV) следует из предыдущего анализа.
2. Шаги 1°, 3° очевидно выполняются за полиномиальное время.
3. Алгоритм Беллмана–Форда работает за полиномиальное время и находит минимальный вес пути из s в t, если в графе нет циклов отрицательного веса, или обнаруживает наличие таковых. Поэтому шаги 2°, 5° выполняются за полиномиальное время.

Свойства алгоритма

1. Корректность (по модулю корректности BV) следует из предыдущего анализа.
2. Шаги 1°, 3° очевидно выполняются за полиномиальное время.
3. Алгоритм Беллмана–Форда работает за полиномиальное время и находит минимальный вес пути из s в t, если в графе нет циклов отрицательного веса, или обнаруживает наличие таковых. Поэтому шаги 2°, 5° выполняются за полиномиальное время.

Свойства алгоритма

1. Корректность (по модулю корректности BV) следует из предыдущего анализа.
2. Шаги 1°, 3° очевидно выполняются за полиномиальное время.
3. Алгоритм Беллмана–Форда работает за полиномиальное время и находит минимальный вес пути из s в t, если в графе нет циклов отрицательного веса, или обнаруживает наличие таковых. Поэтому шаги 2°, 5° выполняются за полиномиальное время.

Процедура $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то
   - 4.1. $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех дуг из позиции u за исключением хода (uv);
   - 4.2. иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Процедура $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то
   - 4.1. $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех дуг из позиции u за исключением хода (uv);
   - 4.2. иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Процедура $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то
   4.1. $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{\{u\}}, \tilde{x})$, здесь $G_{\{u\}}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);
   4.2. иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Процедура $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то

   4.1 $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);

   4.2 иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Процедура $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то

   4.1 $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);

   4.2 иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Процедура $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то
   4.1 $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);
   4.2 иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Корректность процедуры $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$. (Корректность очевидна.)
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то
   4.1 $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);
   4.2 иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Корректность процедуры $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то (Оптимальный ход (uv).)
   4.1 $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);
   4.2 иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$.

Корректность процедуры $\mathrm{BV}(G, x)$

1. Если в каждой позиции Макса возможен только один ход, то $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x$.
2. Выбрать случайный ход (uv) Макса, который не входит в стратегию x (выбор равновероятен).
3. $x^* \leftarrow \mathrm{BV}(G \setminus \{(uv)\}, x)$. Здесь $G \setminus \{(uv)\}$ получается из G удалением хода (uv). Построить стратегию $\tilde{x}$ из x^* изменением стратегии в вершине u: $\tilde{x}(u) = v$.
4. Если $\rho(\tilde{x})_u > \rho(x^*)_u$, то
   4.1 $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow \mathrm{BV}(G_{(uv)}, \tilde{x})$, здесь $G_{(uv)}$ — граф, который получается из G удалением всех ходов из позиции u за исключением хода (uv);
   4.2 иначе $\mathrm{BV}(G, x) \leftarrow x^*$. ($x^*$ глобальный максимум)

Время работы процедуры $\mathrm{BV}(G, x)$

Каждый шаг выполняется за полиномиальное время (для шага 4 используем алгоритм Беллмана–Форда).

Главный вопрос

Сколько рекурсивных вызовов при исполнении процедуры BV?

Оптимизация функций на многомерных боксах

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы

Бокс — это

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n, \quad |\mathcal{P}_i| < \infty.$

Пример бокса

Множество стратегий Макса: $\mathcal{P}_v$ — это множество возможных ходов из позиции v.

Размерность бокса

$\dim \mathcal{P}$ равна количеству координат i, для которых $|\mathcal{P}_i| > 1$.

Подбокс

$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \times \cdots \times \mathcal{P}'_n, \quad \mathcal{P}'_i \subseteq \mathcal{P}_i.$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы

Бокс — это

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n, \quad |\mathcal{P}_i| < \infty.$

Пример бокса

Множество стратегий Макса: $\mathcal{P}_v$ — это множество возможных ходов из позиции v.

Размерность бокса

$\dim \mathcal{P}$ равна количеству координат i, для которых $|\mathcal{P}_i| > 1$.

Подбокс

$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \times \cdots \times \mathcal{P}'_n, \quad \mathcal{P}'_i \subseteq \mathcal{P}_i.$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы

Бокс — это

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n, \quad |\mathcal{P}_i| < \infty.$

Пример бокса

Множество стратегий Макса: $\mathcal{P}_v$ — это множество возможных ходов из позиции v.

Размерность бокса

$\dim \mathcal{P}$ равна количеству координат i, для которых $|\mathcal{P}_i| > 1$.

Подбокс

$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \times \cdots \times \mathcal{P}'_n, \quad \mathcal{P}'_i \subseteq \mathcal{P}_i.$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы

Бокс — это

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n, \quad |\mathcal{P}_i| < \infty.$

Пример бокса

Множество стратегий Макса: $\mathcal{P}_v$ — это множество возможных ходов из позиции v.

Размерность бокса

$\dim \mathcal{P}$ равна количеству координат i, для которых $|\mathcal{P}_i| > 1$.

Подбокс

$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \times \cdots \times \mathcal{P}'_n, \quad \mathcal{P}'_i \subseteq \mathcal{P}_i.$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы (прод.)

Грань бокса $\mathcal{F}$

это подбокс, который получается фиксацией значений части координат.

Фасета

это грань, в которой фиксировано значение одной координаты.

Количество фасет

$$m = \sum_{i:|\mathcal{P}_i|>1} |\mathcal{P}_i|.$$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы (прод.)

Грань бокса $\mathcal{F}$

это подбокс, который получается фиксацией значений части координат.

Фасета

это грань, в которой фиксировано значение одной координаты.

Количество фасет

$$m = \sum_{i:|\mathcal{P}_i|>1} |\mathcal{P}_i|.$$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы (прод.)

Грань бокса $\mathcal{F}$

это подбокс, который получается фиксацией значений части координат.

Фасета

это грань, в которой фиксировано значение одной координаты.

Количество фасет

$$m = \sum_{i:|\mathcal{P}_i|>1} |\mathcal{P}_i|.$$

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы (оконч.)

Соседи в боксе:

пара точек, которые различаются ровно в одной координате.

В боксе стратегий соседние стратегии получаются изменением хода в одной позиции.

Количество соседей у точки

$m - d$

(в координате i можно изменить значение координаты $|\mathcal{P}_i| - 1$ способами).

«Комбинаторные параллелепипеды» или боксы (оконч.)

Соседи в боксе:

пара точек, которые различаются ровно в одной координате.

В боксе стратегий соседние стратегии получаются изменением хода в одной позиции.

Количество соседей у точки

$m - d$

(в координате i можно изменить значение координаты $|\mathcal{P}_i| - 1$ способами).

Функции на боксах

Задача поиска максимума функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ (множество значений $\mathcal{D}$ частично упорядочено).

Пример: расстояния до терминала

$\rho\colon \mathcal{P} \to (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^{|V|}$ (порядок на векторах покоординатный).

Локальный максимум функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$:

такая точка x бокса, что для любого соседа x' точки x выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x')$.

Глобальный максимум функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$:

такая точка x бокса, что для любой $x' \in \mathcal{P}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x')$.

Функции на боксах

Задача поиска максимума функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ (множество значений $\mathcal{D}$ частично упорядочено).

Пример: расстояния до терминала

$\rho\colon \mathcal{P} \to (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^{|V|}$ (порядок на векторах покоординатный).

Локальный максимум функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$:

такая точка x бокса, что для любого соседа x' точки x выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x')$.

Глобальный максимум функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$:

такая точка x бокса, что для любой $x' \in \mathcal{P}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x')$.

Функции на боксах

Задача поиска максимума функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ (множество значений $\mathcal{D}$ частично упорядочено).

Пример: расстояния до терминала

$\rho\colon \mathcal{P} \to (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^{|V|}$ (порядок на векторах покоординатный).

Локальный максимум функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$:

такая точка x бокса, что для любого соседа x' точки x выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x')$.

Глобальный максимум функции $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$:

такая точка x бокса, что для любой $x' \in \mathcal{P}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x')$.

Свойства функции расстояний до терминала

1. Глобальные максимумы существуют.
2. Локальные максимумы совпадают с глобальными.
3. Возможность локального улучшения в одной позиции гарантирует увеличение значения функции расстояния (в остальных позициях не становится хуже).

Улучшающий сосед x' точки x:

$f(x') > f(x_t)$.

Утверждение

Для функции расстояния либо у точки x есть улучшающий сосед, либо точка x — глобальный максимум.

Свойства функции расстояний до терминала

1. Глобальные максимумы существуют.
2. Локальные максимумы совпадают с глобальными.
3. Возможность локального улучшения в одной позиции гарантирует увеличение значения функции расстояния (в остальных позициях не становится хуже).

Улучшающий сосед x' точки x:
$f(x') > f(x_t)$.

Утверждение
Для функции расстояния либо у точки x есть улучшающий сосед, либо точка x — глобальный максимум.

Свойства функции расстояний до терминала

1. Глобальные максимумы существуют.
2. Локальные максимумы совпадают с глобальными.
3. Возможность локального улучшения в одной позиции гарантирует увеличение значения функции расстояния (в остальных позициях не становится хуже).

Улучшающий сосед x' точки x:
$f(x') > f(x_t)$.

Утверждение

Для функции расстояния либо у точки x есть улучшающий сосед, либо точка x — глобальный максимум.

BV-функции

Определение

Функция $f : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, где $\mathcal{P}$ — бокс, а $\mathcal{D}$ — частично упорядоченное множество, является BV-функцией, если для любого подбокса $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ выполняется свойство: если у точки $x \in \mathcal{P}'$ нет улучшающего соседа в подбоксе $\mathcal{P}'$, то точка x является глобальным максимумом ограничения функции f на подбокс $\mathcal{P}'$.

Утверждение

Функция расстояний до терминала на подбоксе стратегий является BV-функцией.

(Любой подбокс бокса стратегий — это бокс стратегий игры с меньшим количеством ходов.)

BV-функции

Определение

Функция $f : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, где $\mathcal{P}$ — бокс, а $\mathcal{D}$ — частично упорядоченное множество, является BV-функцией, если для любого подбокса $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ выполняется свойство: если у точки $x \in \mathcal{P}'$ нет улучшающего соседа в подбоксе $\mathcal{P}'$, то точка x является глобальным максимумом ограничения функции f на подбокс $\mathcal{P}'$.

Утверждение

Функция расстояний до терминала на подбоксе стратегий является BV-функцией.

(Любой подбокс бокса стратегий — это бокс стратегий игры с меньшим количеством ходов.)

Алгоритм оптимизации BV-функций

Алгоритм $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0)$ (J. Matoušek, M. Sharir, and E. Welzl, 1996).

1. Если $\dim \mathcal{P} = 0$, то $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0) \leftarrow v_0$.
2. Выбрать случайную фасету $\mathcal{F}$ бокса $\mathcal{P}$, не содержащую точку v_0 (выбор равновероятен).
3. $v^* \leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}, v_0)$, u — сосед v^* в фасете $\mathcal{F}$.
4. Если $f(u) > f(v^*)$, то
   4.1 $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0) \leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{F}, u)$;
   4.2 иначе $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0) \leftarrow v^*$.

Наблюдение

Процедура BV — это MSW, применённый к боксу стратегий.

Алгоритм оптимизации BV-функций

Алгоритм $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0)$ (J. Matoušek, M. Sharir, and E. Welzl, 1996).

1. Если $\dim \mathcal{P} = 0$, то $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0) \leftarrow v_0$.
2. Выбрать случайную фасету $\mathcal{F}$ бокса $\mathcal{P}$, не содержащую точку v_0 (выбор равновероятен).
3. $v^* \leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}, v_0)$, u — сосед v^* в фасете $\mathcal{F}$.
4. Если $f(u) > f(v^*)$, то
   4.1 $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0) \leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{F}, u)$;
   4.2 иначе $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0) \leftarrow v^*$.

Наблюдение

Процедура BV — это MSW, применённый к боксу стратегий.

Корректность MSW

Теорема корректности

Если $f : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ — BV-функция, то $\mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v_0)$ является глобальным максимумом функции f для любой начальной точки.

Корректность MSW

Доказательство

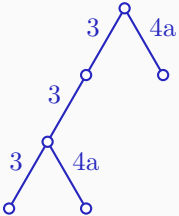
Индукция по количеству фасет в боксе.

1. База: если нет ни одной фасеты, то $\mathcal{P}$ состоит из одной точки v_0.
2. Индуктивный переход.
   2.1 $v^* \leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}, v_0)$; $f(u) > f(v^*)$ (глобальный максимум на $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ меньше $f(u^*)$). Тогда глобальный максимум на $\mathcal{P}$ совпадает с глобальным максимумом на $\mathcal{F}$.
   2.2 $v^* \leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}, v_0)$; неверно, что $f(u) > f(v^*)$. Тогда у v^* нет улучшающего соседа в $\mathcal{P}$. Так как f — BV-функция, то v^* — глобальный максимум на $\mathcal{P}$.

Оценка времени работы алгоритма MSW

Количество рекурсивных вызовов не больше произведения глубины дерева рекурсии на количество листьев в дереве рекурсии.

Глубина не больше m (количества фасет).

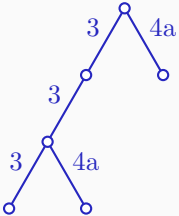


Далее оцениваем математическое ожидание количества листьев в дереве рекурсии.

Оценка времени работы алгоритма MSW

Количество рекурсивных вызовов не больше произведения глубины дерева рекурсии на количество листьев в дереве рекурсии.

Глубина не больше m (количества фасет).



Далее оцениваем математическое ожидание количества листьев в дереве рекурсии.

Скрытая размерность

Пусть задана BV-функция $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$.

Определения

Экстремальная фасета содержит все локальные (=глобальные) максимумы функции f в боксе $\mathcal{P}$.

Скрытая размерность $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$ пары — это разность $\dim \mathcal{P}$ и числа фасет, содержащих v и все u, т.ч. $f(u) > f(v)$.

Наблюдения

Количество экстремальных фасет $\leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = 0 \Leftrightarrow v$ — *глобальный максимум*.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = k \Leftrightarrow \mathrm{MBW}(\mathcal{P}, v)$ *работает с точками k-мерной грани бокса $\mathcal{P}$*

Скрытая размерность

Пусть задана BV-функция $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$.

Определения

Экстремальная фасета содержит все локальные (=глобальные) максимумы функции f в боксе $\mathcal{P}$.

Скрытая размерность $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$ пары — это разность $\dim \mathcal{P}$ и числа фасет, содержащих v и все u, т.ч. $f(u) > f(v)$.

Наблюдения

Количество экстремальных фасет $\leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = 0 \Leftrightarrow v$ — глобальный максимум.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = k \Leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v)$ работает с точками k-мерной грани бокса $\mathcal{P}$.

Скрытая размерность

Пусть задана BV-функция $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$.

Определения

Экстремальная фасета содержит все локальные (=глобальные) максимумы функции f в боксе $\mathcal{P}$.

Скрытая размерность $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$ пары — это разность $\dim \mathcal{P}$ и числа фасет, содержащих v и все u, т.ч. $f(u) > f(v)$.

Наблюдения

Количество экстремальных фасет $\leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = 0 \Leftrightarrow v$ — глобальный максимум.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = k \Leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v)$ работает с точками k-мерной грани бокса $\mathcal{P}$.

Скрытая размерность

Пусть задана BV-функция $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$.

Определения

Экстремальная фасета содержит все локальные (=глобальные) максимумы функции f в боксе $\mathcal{P}$.

Скрытая размерность $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$ пары — это разность $\dim \mathcal{P}$ и числа фасет, содержащих v и все u, т.ч. $f(u) > f(v)$.

Наблюдения

Количество экстремальных фасет $\leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = 0 \Leftrightarrow v$ — глобальный максимум.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) = k \Leftarrow \mathrm{MSW}(\mathcal{P}, v)$ работает с точками k-мерной грани бокса $\mathcal{P}$.

Оценка количества листьев в дереве рекурсии

Определения

$L(k, m, d)$ — максимальное матожидание количества листьев в дереве рекурсии MSW на паре $(\mathcal{P}, v)$, для которой $\dim \mathcal{P} \leqslant d$, $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) \leqslant k$, количество фасет $\leqslant m$.

Функция $g(k, n)$:

$$g(k, 0) = 1,$$

$$g(0, n) = 1,$$

$$g(k, n) = g(k, n-1) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} g(k-j, n).$$

Лемма

$L(k, m, d) \leqslant g(k, m-d)$.

Оценка количества листьев в дереве рекурсии

Определения

$L(k, m, d)$ — максимальное матожидание количества листьев в дереве рекурсии MSW на паре $(\mathcal{P}, v)$, для которой $\dim \mathcal{P} \leqslant d$, $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) \leqslant k$, количество фасет $\leqslant m$.

Функция $g(k, n)$:

$$g(k, 0) = 1,$$
$$g(0, n) = 1,$$
$$g(k, n) = g(k, n-1) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} g(k-j, n).$$

Лемма

$L(k, m, d) \leqslant g(k, m-d)$.

Оценка количества листьев в дереве рекурсии

Определения

$L(k, m, d)$ — максимальное матожидание количества листьев в дереве рекурсии MSW на паре $(\mathcal{P}, v)$, для которой $\dim \mathcal{P} \leqslant d$, $\mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) \leqslant k$, количество фасет $\leqslant m$.

Функция $g(k, n)$:

$$g(k, 0) = 1,$$
$$g(0, n) = 1,$$
$$g(k, n) = g(k, n-1) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} g(k-j, n).$$

Лемма

$L(k, m, d) \leqslant g(k, m-d)$.

Доказательство леммы: база индукции

$d = \dim \mathcal{P}$, $k = \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$, m — количество фасет $\mathcal{P}$.

Доказательство индукцией по k, $m - d$.

Пусть $m - d = 0$. Так как $m \geqslant 2d$, то $m = d = 0$. То есть алгоритм исполняет лишь шаг 1. Количество листьев в дереве рекурсии $1 \leqslant 1 = g(k, 0)$.

Пусть $k = 0$, то есть точка v — глобальный максимум функции f. Тогда при исполнении шага 3 получим $v^* = v$. То же самое справедливо для всех рекурсивных вызовов на подбоксах. Дерево рекурсии — путь, один лист. $1 \leqslant 1 = g(0, m - d)$.

Доказательство леммы: база индукции

$d = \dim \mathcal{P}$, $k = \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$, m — количество фасет $\mathcal{P}$.

Доказательство индукцией по k, $m - d$.

Пусть $m - d = 0$. Так как $m \geqslant 2d$, то $m = d = 0$. То есть алгоритм исполняет лишь шаг 1. Количество листьев в дереве рекурсии $1 \leqslant 1 = g(k, 0)$.

Пусть $k = 0$, то есть точка v — глобальный максимум функции f. Тогда при исполнении шага 3 получим $v^* = v$. То же самое справедливо для всех рекурсивных вызовов на подбоксах. Дерево рекурсии — путь, один лист. $1 \leqslant 1 = g(0, m - d)$.

Доказательство леммы: база индукции

$d = \dim \mathcal{P}$, $k = \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$, m — количество фасет $\mathcal{P}$.

Доказательство индукцией по k, $m - d$.

Пусть $m - d = 0$. Так как $m \geqslant 2d$, то $m = d = 0$. То есть алгоритм исполняет лишь шаг 1. Количество листьев в дереве рекурсии $1 \leqslant 1 = g(k, 0)$.

Пусть $k = 0$, то есть точка v — глобальный максимум функции f. Тогда при исполнении шага 3 получим $v^* = v$. То же самое справедливо для всех рекурсивных вызовов на подбоксах. Дерево рекурсии — путь, один лист. $1 \leqslant 1 = g(0, m - d)$.

Индуктивный переход, шаг 3

$\#\text{фасет}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) < \#\text{фасет}(\mathcal{P})$.

$\dim(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) \leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) \leqslant \mathrm{hdim}\, \mathcal{P}$: все фасеты, которые содержали v и все точки u, для которых $f(u) > f(v)$, в пересечении с $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ будут содержать те же точки в $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ (при ограничении могут разве что появиться дополнительные фасеты с таким свойством).

По индуктивному предположению матожидание количества листьев при вызове MSW на шаге 3 не превосходит $g(k, m-1-d)$.

Индуктивный переход, шаг 3

$\#\text{фасет}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) < \#\text{фасет}(\mathcal{P})$.

$\dim(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) \leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) \leqslant \mathrm{hdim}\, \mathcal{P}$: все фасеты, которые содержали v и все точки u, для которых $f(u) > f(v)$, в пересечении с $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ будут содержать те же точки в $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ (при ограничении могут разве что появиться дополнительные фасеты с таким свойством).

По индуктивному предположению матожидание количества листьев при вызове MSW на шаге 3 не превосходит $g(k, m-1-d)$.

Индуктивный переход, шаг 3

$\#\text{фасет}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) < \#\text{фасет}(\mathcal{P})$.

$\dim(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) \leqslant \dim \mathcal{P}$.

$\mathrm{hdim}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_j) \leqslant \mathrm{hdim}\, \mathcal{P}$: все фасеты, которые содержали v и все точки u, для которых $f(u) > f(v)$, в пересечении с $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ будут содержать те же точки в $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$ (при ограничении могут разве что появиться дополнительные фасеты с таким свойством).

По индуктивному предположению матожидание количества листьев при вызове MSW на шаге 3 не превосходит $g(k, m-1-d)$.

Индуктивный переход, шаг 4.1

В этом случае выбрана экстремальная фасета $\mathcal{F}$, одна из $k' \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$, не содержащих v.

Упорядочим эти фасеты $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k'}$ так, чтобы последовательность

$$M_1, \ldots, M_{k'}, \qquad M_i = \max_{x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_i} f(x),$$

уважала частичный порядок $\mathcal{D}$ (линейное продолжение): из $M_i \leqslant M_j$ следует $i \leqslant j$.

Утверждение

$\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j.$

Индуктивный переход, шаг 4.1

В этом случае выбрана экстремальная фасета $\mathcal{F}$, одна из $k' \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v)$, не содержащих v.

Упорядочим эти фасеты $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k'}$ так, чтобы последовательность

$$M_1, \ldots, M_{k'}, \qquad M_i = \max_{x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_i} f(x),$$

уважала частичный порядок $\mathcal{D}$ (линейное продолжение): из $M_i \leqslant M_j$ следует $i \leqslant j$.

Утверждение

$\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j$.

Доказательство утверждения

Утверждение

$\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j$.

1. $f(v^*) = M_j < f(u)$. (u — это сосед v^* в фасете $\mathcal{F}_j$).
2. Тогда $u \in \mathcal{F}_i$ для всех $i \leqslant j$.
   Если $u \notin F_i$, то $u \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_i$, значит, $M_j = f(v^*) < f(u) \leqslant M_i$. Противоречие с выбором $(\mathcal{F}_i)$.

Вывод: скрытая размерность уменьшается по крайней мере на j.

Доказательство утверждения

Утверждение

$\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j$.

1. $f(v^*) = M_j < f(u)$. (u — это сосед v^* в фасете $\mathcal{F}_j$).
2. Тогда $u \in \mathcal{F}_i$ для всех $i \leqslant j$.
   Если $u \notin F_i$, то $u \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_i$, значит, $M_j = f(v^*) < f(u) \leqslant M_i$. Противоречие с выбором $(\mathcal{F}_i)$.

Вывод: скрытая размерность уменьшается по крайней мере на j.

Доказательство утверждения

Утверждение

$\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j$.

1. $f(v^*) = M_j < f(u)$. (u — это сосед v^* в фасете $\mathcal{F}_j$).
2. Тогда $u \in \mathcal{F}_i$ для всех $i \leqslant j$.
   Если $u \notin F_i$, то $u \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}_i$, значит, $M_j = f(v^*) < f(u) \leqslant M_i$. Противоречие с выбором $(\mathcal{F}_i)$.

Вывод: скрытая размерность уменьшается по крайней мере на j.

Индуктивный переход (окончание)

$k' \leqslant k$, $k' \leqslant m - d$.

При выборе $\mathcal{F}_j$: $\dim \mathcal{F}_j = \dim \mathcal{P} - 1$; $\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j$; $\#\text{фасет}(\mathcal{F}_j) < \#\text{фасет}(\mathcal{P})$.

Индуктивное предположение: матожидание числа листьев $\leqslant g(k - j, m - d)$.

Вероятность выбрать $\mathcal{F}_j$ равна $1/(m - d)$. По линейности матожидания получаем оценку

$$L(k, m, d) \leqslant g(k, m - 1 - d) + \\ + \frac{1}{m - d} \sum_{j=1}^{\min(k, m-d)} g(k - j, m - d) = g(k, m - d),$$

что и требовалось.

Индуктивный переход (окончание)

$k' \leqslant k$, $k' \leqslant m - d$.

При выборе $\mathcal{F}_j$: $\dim \mathcal{F}_j = \dim \mathcal{P} - 1$; $\mathrm{hdim}(\mathcal{F}_j, u) \leqslant \mathrm{hdim}(\mathcal{P}, v) - j$; $\#\text{фасет}(\mathcal{F}_j) < \#\text{фасет}(\mathcal{P})$.

Индуктивное предположение: матожидание числа листьев $\leqslant g(k - j, m - d)$.

Вероятность выбрать $\mathcal{F}_j$ равна $1/(m - d)$. По линейности матожидания получаем оценку

$$L(k, m, d) \leqslant g(k, m - 1 - d) + \\ + \frac{1}{m - d} \sum_{j=1}^{\min(k, m-d)} g(k - j, m - d) = g(k, m - d),$$

что и требовалось.

Скорость роста функции $g(k, n)$

Теорема

$g(k, n) = \exp\left(\sqrt{k}\ln n + O(\sqrt{k} + \ln n)\right)$ при $k, n > 0$.

Следствие 1

Математическое ожидание времени работы алгоритма BV решения циклических игр не превосходит $\exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$, где n — количество вершин в графе игры.

$(m - d = O(n^2),\ k \leqslant n)$.

Следствие 2

BV' запускает BV, ограничивая количество вызовов $\varepsilon^{-1}\exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$.

Из неравенства Маркова следует, что BV' даёт правильный ответ с вероятностью ошибки $\leqslant \varepsilon$.

Скорость роста функции $g(k, n)$

Теорема

$g(k, n) = \exp\left(\sqrt{k}\ln n + O(\sqrt{k} + \ln n)\right)$ при $k, n > 0$.

Следствие 1

Математическое ожидание времени работы алгоритма BV решения циклических игр не превосходит $\exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$, где n — количество вершин в графе игры.

$(m - d = O(n^2),\ k \leqslant n)$.

Следствие 2

BV' запускает BV, ограничивая количество вызовов $\varepsilon^{-1}\exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$.

Из неравенства Маркова следует, что BV' даёт правильный ответ с вероятностью ошибки $\leqslant \varepsilon$.

Скорость роста функции $g(k, n)$

Теорема

$g(k, n) = \exp\left(\sqrt{k}\ln n + O(\sqrt{k} + \ln n)\right)$ при $k, n > 0$.

Следствие 1

Математическое ожидание времени работы алгоритма BV решения циклических игр не превосходит $\exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$, где n — количество вершин в графе игры.

$(m - d = O(n^2),\ k \leqslant n)$.

Следствие 2

BV' запускает BV, ограничивая количество вызовов $\varepsilon^{-1}\exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$.

Из неравенства Маркова следует, что BV' даёт правильный ответ с вероятностью ошибки $\leqslant \varepsilon$.

Решение рекурренты

Семейство производящих функций

$$g(k,0) = 1, \quad g(0,n) = 1,$$
$$g(k,n) = g(k,n-1) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} g(k-j,n).$$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,n) z^k.$$

Граничные условия $\quad G_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

Рекуррента $\quad G_n(z) = G_{n-1}(z) + \frac{z+z^2+\dots+z^n}{n} \cdot G_n(z),$

то есть $\quad G_n(z) = G_{n-1}(z) \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+z^2+\dots+z^n}{n}}$.

Семейство производящих функций

$$g(k,0) = 1, \quad g(0,n) = 1,$$
$$g(k,n) = g(k,n-1) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} g(k-j,n).$$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,n) z^k.$$

Граничные условия $\quad G_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

Рекуррента $\quad G_n(z) = G_{n-1}(z) + \frac{z+z^2+\cdots+z^n}{n} \cdot G_n(z),$

то есть $\quad G_n(z) = G_{n-1}(z) \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+z^2+\cdots+z^n}{n}}$.

Формула в «замкнутом виде» и коэффициенты производящей функции

$$G_n(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{z+z^2+\dots+z^j}{j}} \ .$$

Теорема Коши

$$g(k,n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{G_n(z)}{z^{k+1}}\, dz.$$

Контур γ один раз обходит 0 и не содержит других точек, в которых знаменатели обращаются в 0.

Формула в «замкнутом виде» и коэффициенты производящей функции

$$G_n(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{z+z^2+\dots+z^j}{j}} \ .$$

Теорема Коши

$$g(k,n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{G_n(z)}{z^{k+1}}\, dz.$$

Контур γ один раз обходит 0 и не содержит других точек, в которых знаменатели обращаются в 0.

Выбор контура интегрирования и оценка интеграла

Годится окружность $|z| = t < 1$. При $|z| \leqslant t$

$$\left|\frac{z + z^2 + \cdots + z^j}{j}\right| \leqslant \frac{t + t^2 + \cdots + t^j}{j} \leqslant t,$$

каждый знаменатель по модулю не меньше $1 - t$.

При $|z| = t$

$$|G_n(z)| \leqslant \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\cdots+t^j}{j}},$$

Отсюда оценка интеграла

$$g(k, n) \leqslant \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\cdots+t^j}{j}}.$$

Выбор контура интегрирования и оценка интеграла

Годится окружность $|z| = t < 1$. При $|z| \leqslant t$

$$\left|\frac{z + z^2 + \cdots + z^j}{j}\right| \leqslant \frac{t + t^2 + \cdots + t^j}{j} \leqslant t,$$

каждый знаменатель по модулю не меньше $1 - t$.

При $|z| = t$

$$|G_n(z)| \leqslant \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\cdots+t^j}{j}},$$

Отсюда оценка интеграла

$$g(k, n) \leqslant \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\cdots+t^j}{j}}.$$

Упрощение оценки

$t = 1 - 1/q$, где $q = \lceil \sqrt{k+1} \rceil \geqslant 2$ при $k > 0$.

$$g(k,n) \leqslant \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\dots+t^j}{j}} \,.$$

Оценка первого множителя: из

$$e^{-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

получаем

$$\frac{1}{t^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-k-1} \leqslant e^{(k+1)/(q-1)}.$$

Второй множитель равен q.

Упрощение оценки

$t = 1 - 1/q$, где $q = \lceil \sqrt{k+1} \rceil \geqslant 2$ при $k > 0$.

$$g(k,n) \leqslant \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\dots+t^j}{j}} .$$

Оценка первого множителя: из

$$e^{-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

получаем

$$\frac{1}{t^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-k-1} \leqslant e^{(k+1)/(q-1)}.$$

Второй множитель равен q.

Упрощение оценки

$t = 1 - 1/q$, где $q = \lceil \sqrt{k+1} \rceil \geqslant 2$ при $k > 0$.

$$g(k,n) \leqslant \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\dots+t^j}{j}} .$$

Оценка первого множителя: из

$$e^{-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

получаем

$$\frac{1}{t^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-k-1} \leqslant e^{(k+1)/(q-1)}.$$

Второй множитель равен q.

Оценка третьего множителя при $j \geqslant q$

$$g(k,n) \leqslant \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-t} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\dots+t^j}{j}} \,.$$

Из

$$1 - \frac{t+t^2+\dots+t^j}{j} = 1 - \frac{t}{j} \cdot \frac{1-t^j}{1-t} =$$

$$= 1 - \frac{1-1/q}{j/q} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{q}\right)^j\right) \geqslant 1 - \frac{q-1}{j}$$

получаем

$$\prod_{j=q}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\dots+t^j}{j}} \leqslant \prod_{j=q}^{n} \frac{j}{j-q-1} = \frac{q \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-q+1)} = \binom{n}{q-1} \,.$$

Оценка третьего множителя при $j < q$

$$1 - \frac{t + t^2 + \dots + t^j}{j} = 1 - \frac{q}{j} \cdot (t - t^{j+1}) =$$

$$= \frac{j/q - 1 + 1/q + (1 - 1/q)^{j+1}}{j/q} =$$

$$= \frac{q}{j} \cdot \left(\binom{j+1}{2} \cdot \frac{1}{q^2} - \binom{j+1}{3} \cdot \frac{1}{q^3} + \dots \right)$$

Знакочередующаяся сумма, в которой модули слагаемых убывают. Поэтому

$$1 - \frac{t + t^2 + \dots + t^j}{j} \geqslant \frac{1}{j} \cdot \left(\frac{(j+1)j}{2} \cdot \frac{1}{q} - \frac{(j+1)j(j-1)}{6} \cdot \frac{1}{q^2} \right) \geqslant \frac{j}{3q}.$$

Оценка третьего множителя при $j < q$

$$1 - \frac{t + t^2 + \dots + t^j}{j} = 1 - \frac{q}{j} \cdot (t - t^{j+1}) =$$
$$= \frac{j/q - 1 + 1/q + (1 - 1/q)^{j+1}}{j/q} =$$
$$= \frac{q}{j} \cdot \left(\binom{j+1}{2} \cdot \frac{1}{q^2} - \binom{j+1}{3} \cdot \frac{1}{q^3} + \dots \right)$$

Знакочередующаяся сумма, в которой модули слагаемых убывают. Поэтому

$$1 - \frac{t + t^2 + \dots + t^j}{j} \geqslant \frac{1}{j} \cdot \left(\frac{(j+1)j}{2} \cdot \frac{1}{q} - \frac{(j+1)j(j-1)}{6} \cdot \frac{1}{q^2} \right) \geqslant \frac{j}{3q} \, .$$

Оценка третьего множителя при $j < q$ (окончание)

Уже получили

$$1 - \frac{t + t^2 + \cdots + t^j}{j} \geqslant \frac{j}{3q}\,.$$

Из оценки факториала $n! \geqslant (n/3)^n$ получаем

$$\prod_{j=1}^{q-1} \frac{1}{1 - \frac{t+t^2+\cdots+t^j}{j}} \leqslant \prod_{j=1}^{q-1} \frac{3q}{j} \leqslant \frac{(3q)^q}{q!} \leqslant 9^q.$$

Сводим вместе

$$g(k,n) \leqslant e^{(k+1)/(q-1)} \cdot q \cdot \binom{n}{q-1} \cdot 9^q.$$

Для $q = \lceil \sqrt{k+1} \rceil$ выполняется

$$\left| \frac{k+1}{q-1} - \sqrt{k} \right| \leqslant 1, \quad \left| q - \sqrt{k} \right| \leqslant 1$$

и потому

$$g(k,n) \leqslant \exp\left(\sqrt{k} + \ln \sqrt{k} + (\sqrt{k}-1) \ln n + \sqrt{k} \ln 9 + O(\ln n). \right)$$

Теорема доказана.