Вычислительная сложность задач поиска

Даниил Мусатов

МФТИ

Computer Science клуб,
22–23 сентября 2018

Что такое задача поиска

- $V(x, y)$ — некоторый предикат
- Требуется по x найти y, такой что $V(x, y) = 1$, либо указать, что такого y не существует
- Класс задач для полиномиально вычислимых V называется **FNP** (functional **NP**)
- Предмет мини-курса — классификация задач по сложности внутри **FNP**

Задача поиска для **NP**-полных задач

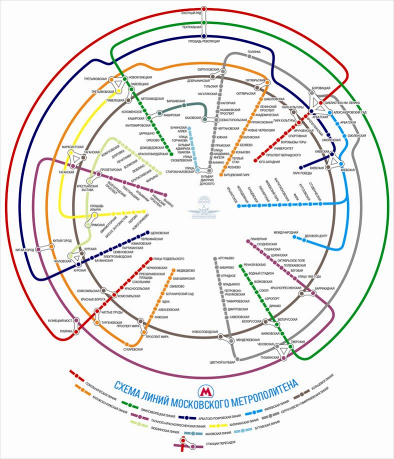
- Пример: задача о клике. По графу G и числу k найти клику размера k.
- Задача распознавания: существует ли такая клика?
- Самосводимость: берём вершину v, узнаём, есть ли в индуцированном подграфе на её соседях клика размера $k-1$.

Задача поиска для **NP**-полных задач

- Пример: задача о клике. По графу G и числу k найти клику размера k.
- Задача распознавания: существует ли такая клика?
- Самосводимость: берём вершину v, узнаём, есть ли в индуцированном подграфе на её соседях клика размера $k-1$.
  - Если есть, то ищем её и добавляем v.
  - Если нет, то удаляем v и ищем клику размера k в оставшемся графе.

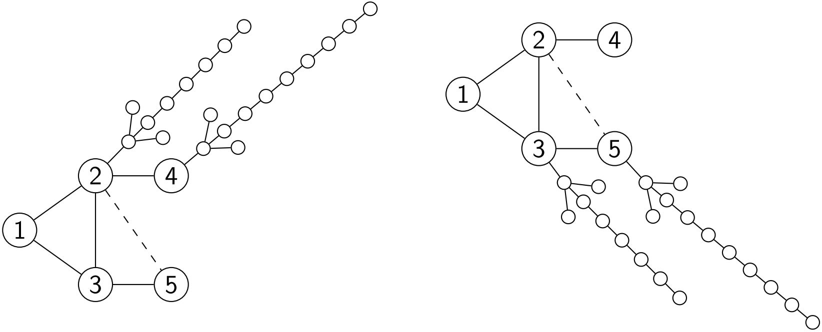
Задача об изоморфизме графов

Это одна схема или разные? Как одну превратить в другую?



Задача поика изоморфизма графа

Тоже есть сводимость к задаче распознавания



Сводимость по Карпу для задач поиска

Определение

Задача поиска V сводится к задаче W, если существуют полиномиально вычислимые функции $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ и $g\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \cup \{\perp\}$, т.ч.:

- Если $\exists y V(x,y) = 1$, то $\exists z W(f(x), z) = 1$;
- Если $W(f(x), z) = 1$ и $g(x,z) \neq \perp$, то $V(x, g(x,z)) = 1$;
- Если $W(f(x), z) = 1$ и $g(x,z) = \perp$, то $\forall y V(x,y) = 0$.

Следствие из теоремы Кука-Левина: поисковая версия любой **NP**-полной задачи также будет полной в **FNP**.

Тотальные задачи поиска (класс **TFNP**)

Часто бывает, что по той или иной причине искомый объект существует всегда:

- Лемма о рукопожатиях: если в графе есть одна вершина нечётной степени, то есть и другая
- Аналогично, если в орграфе есть одна несбаланированная вершина, то есть и другая
- Принцип Дирихле: если $n+1$ кролик рассажены в n клеток, то два кролика попали в одну клетку
- В любом ориентированном графе без циклов есть сток
- У любого числа есть простой делитель
- Постулат Бертрана: между n и $2n$ всегда есть простое число
- Теорема Рамсея
- ...

Задачи из **TFNP** — не **NP**-полные

Теорема (Megiddo, Papadimitriou, 1988)

Если $V \in \mathbf{TFNP}$ *и* V *полна в* **FNP**, *то* $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

Доказательство.

Пусть SAT сводится к V. Если формула φ невыполнима, но $V(f(\varphi), z) = 1$ то $g(\varphi, z) = \perp$. Но тогда z является сертификатом для невыполнимости. $\square$

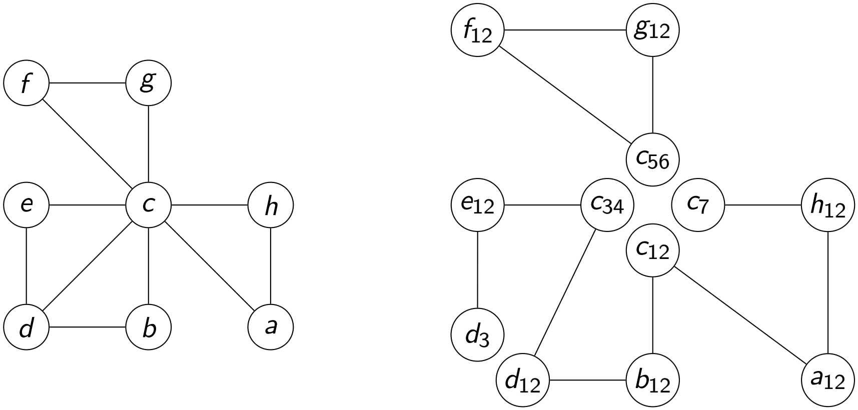
В **TFNP** нет полных задач

- Нет универсальной причины, почему решение всегда существует
- Поэтому класс **TFNP** семантический, а не синтаксический
- В таких классах обычно нет полных задач
- Выход: выделять синтаксические подклассы

Лемма о рукопожатиях: класс **PPA**

- Алгоритм N возвращает полиномиальный список соседей вершины x
- x и y соединены ребром, если $x \in N(y)$ и $y \in N(x)$
- Дана вершина нечётной степени, нужно вернуть другую вершину нечётной степени

PPA: сводимость к циклам и цепочкам



Задача о другом гамильтоновом цикле

Граф называется *кубическим*, если степень каждой его вершины равна в точности 3.

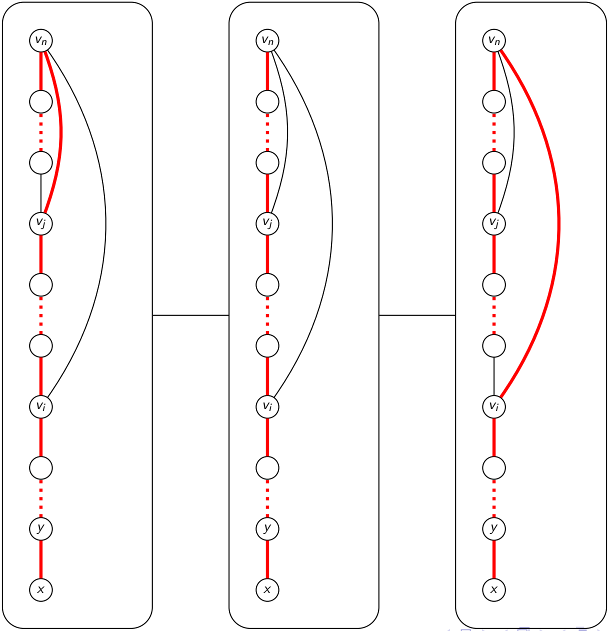
Теорема (C.Smith,1946)

Для любого выделенного ребра в кубическом графе количество гамильтоновых циклов, содержащих это ребро, чётно.

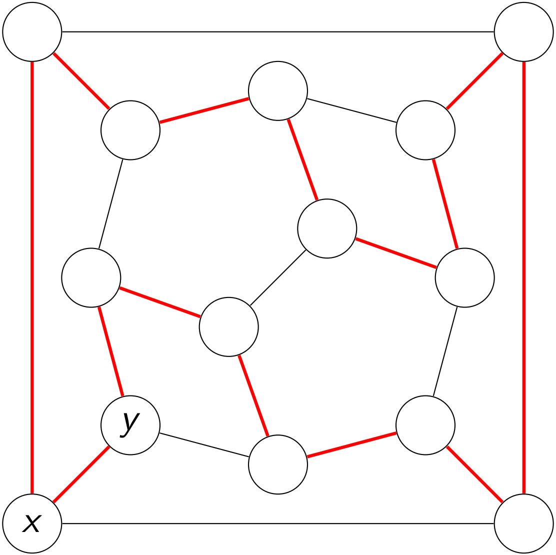
Доказательство.

Алгоритм Томасона (1978): можно модифицировать гамильтонов путь, пока он из одного цикла не станет другим. $\square$

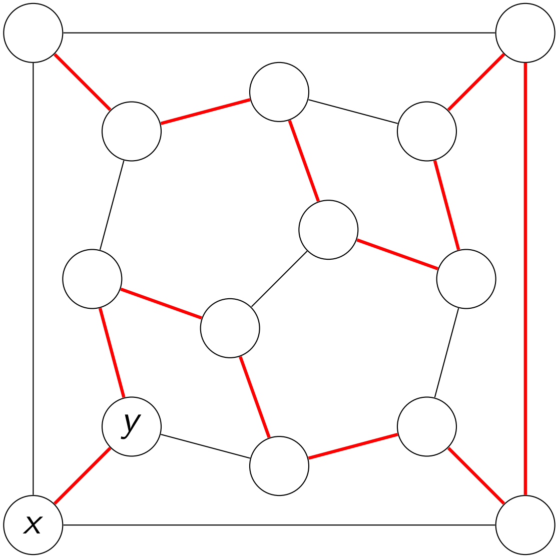
Преобразование Томасона



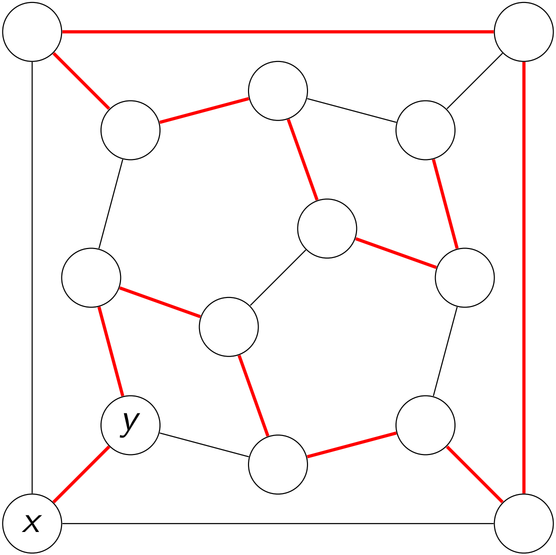
Преобразование Томасона: пример



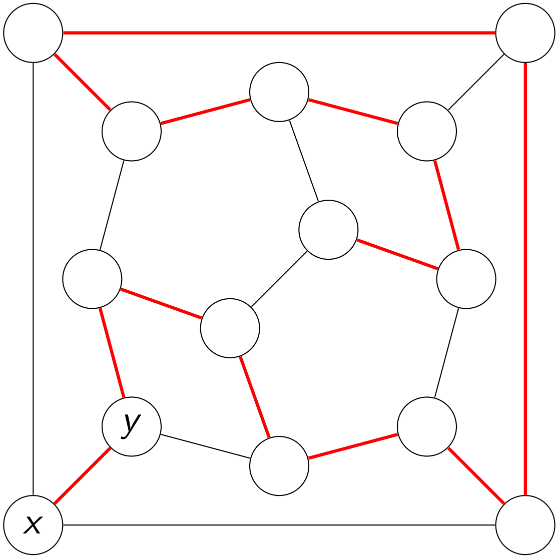
Преобразование Томасона: пример



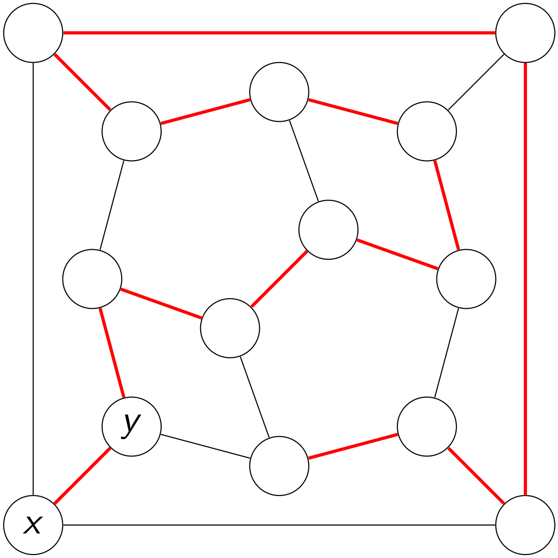
Преобразование Томасона: пример



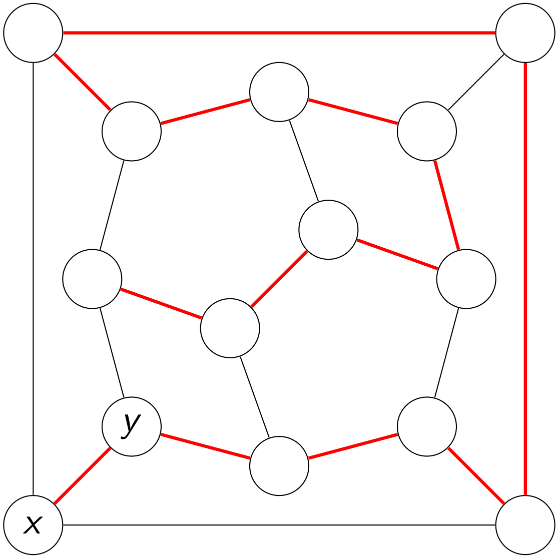
Преобразование Томасона: пример



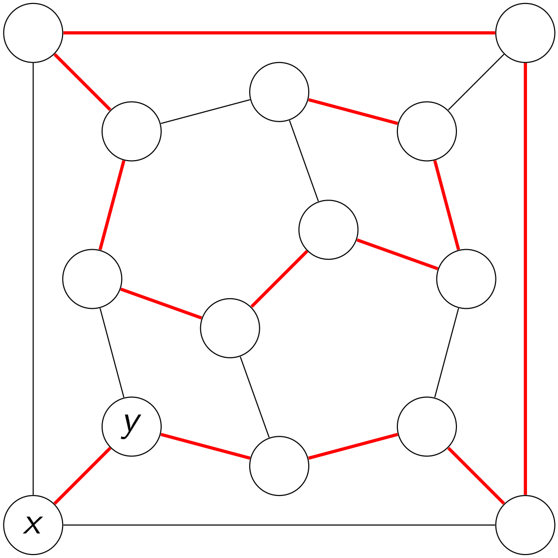
Преобразование Томасона: пример



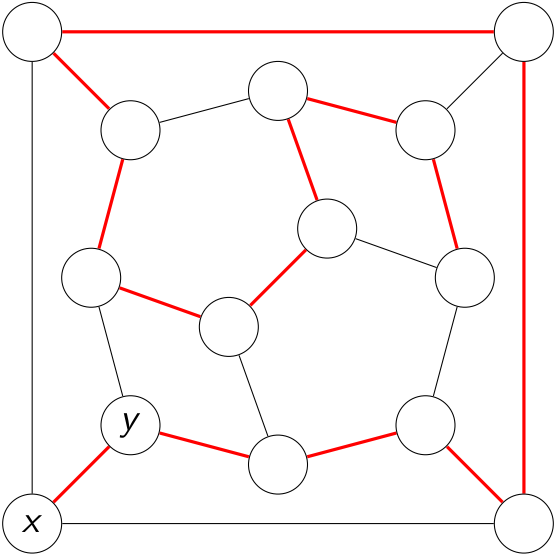
Преобразование Томасона: пример



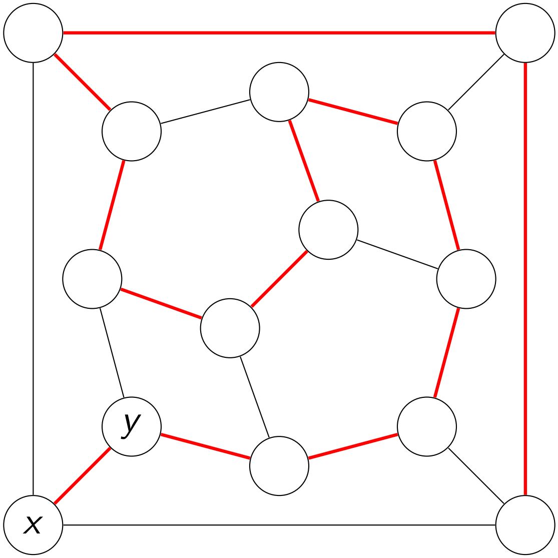
Преобразование Томасона: пример



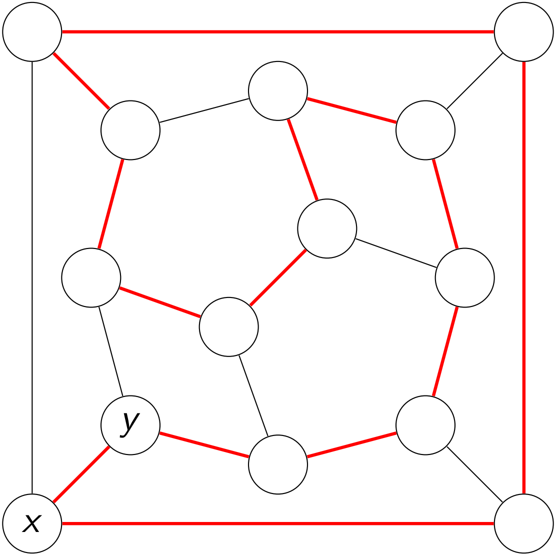
Преобразование Томасона: пример



Преобразование Томасона: пример



Преобразование Томасона: второй цикл



Второй гамильтонов цикл: оценка сложности

- Krawczyk (1999) — пример графа, на котором алгоритм Томасона работает долго
- Cameron (2001) — доказательство экспоненциальной нижней оценки для графа
- Jensen (2012) — альтернативный алгоритм, также экспоненциальный в худшем случае
- Но доказательства **PPA**-полноты тоже нет.

Класс **PPAD**: аналог **PPA** для ориентированного графа

Два подхода:

- По одной несбалансированной вершине ориентированного графа найти другую несбалансированную вершину (AUV — another unbalanced vertex)
- То же для циклов и цепочек (EOL — end of a line)

Во многих источниках написано, что подходы эквивалентны, но на самом деле это, вероятно, не так. Проблема возникает, если баланс по модулю больше двух.

Класс **PPAD**: правильное определение

- Два полиномиальных алгоритма P и N
- Есть ребро (x, y), если $y = N(x)$ и $x = P(y)$
- Дан источник: $N(x) \neq x$, $P(N(x)) = x$, $N(P(x)) \neq x$.
- Нужно найти сток или другой источник

Класс **PPAD**: связь с **PPA**

Теорема

PPAD ⊂ PPA.

Доказательство.

Достаточно снять ориентацию с рёбер в EOL. □

Класс **PPAD**: связь с **PPA**

Теорема

PPAD $\subset$ **PPA**.

Доказательство.

Достаточно снять ориентацию с рёбер в EOL. □

Теорема

AUV $\in$ **PPA**.

Доказательство.

Если изначальный баланс нечётный, то сработает стандартная конструкция. Если же баланс чётен, то нужно рассмотреть максимальную степень 2^k, на которую делится баланс, и перейти к графу из 2^k-элементных подмножеств. Ребро (S, T) проводится, если из каждой вершины S идёт ребро в какую-то вершину T. Исходный источник даст нечётное число новых источников. □

Другие вариации **PPA**

PPADS:

- Аналогично **PPAD**, но нужно найти именно сток
- Работает обобщение на произвольный граф: по вершине положительного баланса нужно найти вершину отрицательного баланса.
- **Теорема:** нахождение стандартного стока — **PSPACE**-полная задача

PPA-p:

- По вершине, баланс которой не делится на p, найти другую такую вершину.
- Вариация для неориентированного графа: по вершине, степень которой не делится на p, найти другую такую вершину

Теорема

PPAD $\subset$ **PPADS**, **PPAD** $\subset$ **PPA**-p, AUV $\in$ **PPADS**, AUV $\in$ **PPA**-p.

Класс PPP

- **Принцип Дирихле**: если k кроликов посажены в $k-1$ клетку, то хотя бы в одной клетке будет хотя бы два кролика.
- **Задача поиска из PPP**: пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ — полиномиально вычислимая функция. Дано $z \in \{0,1\}^n$. Требуется найти либо x, т.ч. $f(x) = z$, либо $x \neq y$, т.ч. $f(x) = f(y)$.

Теорема

PPADS $\subset$ **PPP**.

Задача о равных множествах

Дано: целые положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, такие что $\sum x_i < 2^n - 1$.
Найти: множества $S \neq T$, такие что

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in T} x_i .$$

Эта задача лежит в **PPP**, но для неё неизвестно ни полиномиального алгоритма, ни доказательства **PPP**-полноты.

Класс **PLS**

- Идея: в любом ориентированном графе без циклов есть сток
- Если в каждой вершине графа задано значение некоторой функции, а рёбра проводятся по уменьшению значения функции, то сток — это локальный минимум
- Формально задан набор алгоритмов:
  - $W(x, y)$ проверяет, является ли y допустимым решением для задачи x
  - $f(x)$ ищет начальную допустимую точку y, т.ч. $W(x, y) = 1$
  - $c(x, y)$ — функция издержек для решения y
  - $N(x, y)$ — полиномиальный список соседних с y решений
- Требуется найти y, такой что для любого $z \in N(x, y)$ выполнено $c(x, z) \geqslant c(x, y)$

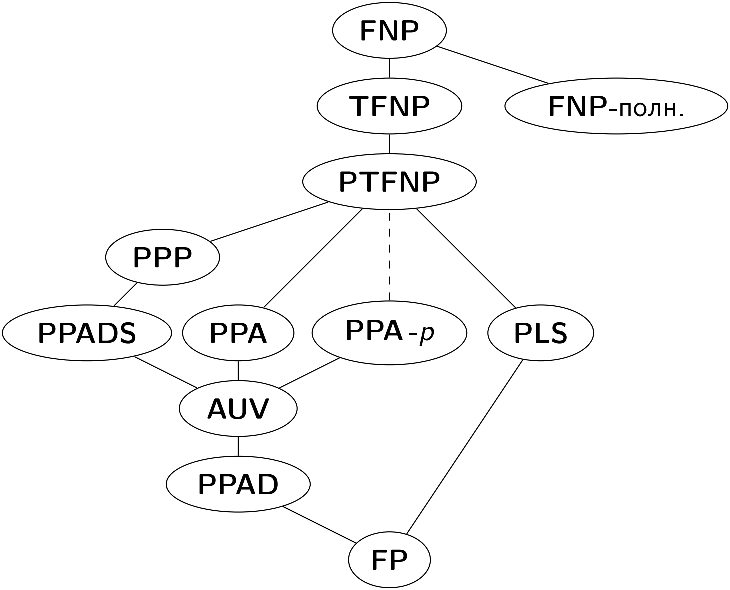
Класс **PLS**: поиск стандартного минимума

- Стандартный «градиентный спуск»: вычисляем $c(x, z)$ для всех $z \in N(x, y)$, ищем минимум, сравниваем с $c(x, y)$
- Поиск результата стандартного спуска — **NP**-трудная задача. Пример:
  - φ — булева формула, y воспринимается как набор значений.
  - Граф — цепочка: $N(\varphi, y) = \{y - 1\}$.
  - Издержки: $c(\varphi, y) = -1$, если φ выполнима, $c(\varphi, y) = y$, если φ невыполнима.
  - Тогда результат стандартного спуска говорит, выполнима ли формула.

Класс **PTFNP**

- Goldberg, Papadimitriou, 2018: Towards a Unified Complexity Theory of Total Functions
- **PTFNP** — provable **TFNP**
- Базовая задача: WRONGPROOF — если в формальной арифметике выведено $2 \cdot 2 = 5$, то в каком-то переходе есть ошибка. Нужно её найти.
- В классе содержатся **PPP**, **PPA** и **PLS**
- Подробности — завтра

Соотношения между классами



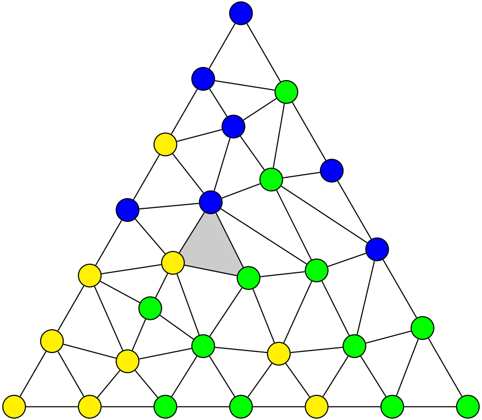
Задачи о неподвижных точках: полнота в PPAD

Лемма Шпернера

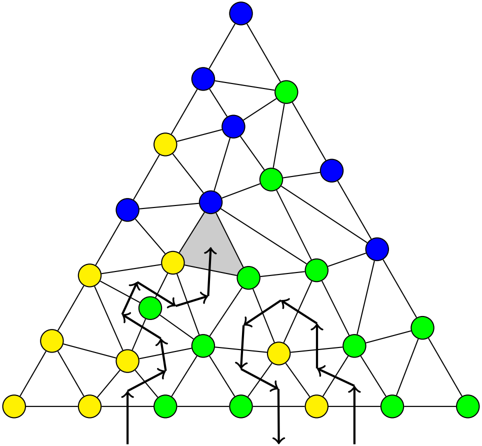
Теоремы о неподвижных точках

- Лемма Шпернера: в правильно раскрашенной триангуляции существует разноцветный симплекс
- Теорема Брауэра: у непрерывной функции на выпуклом компакте есть неподвижная точка
- Теорема Какутани: аналогично для многозначных функций
- Теорема Нэша: в любой конечной игре существует равновесие
- Теорема Скарфа: в любой коалиционной игре есть дробное ядро
- Теорема Эрроу-Дебре: в экономике обмена существует набор равновесных цен. В экономике с производством тоже
- Теорема Симмонса-Су: существует справедливый делёж пирога на связные куски
- Теорема Таккера: в антиподально раскрашенной триангуляции шара существует ребро с противоположно раскрашенными концами
- ...

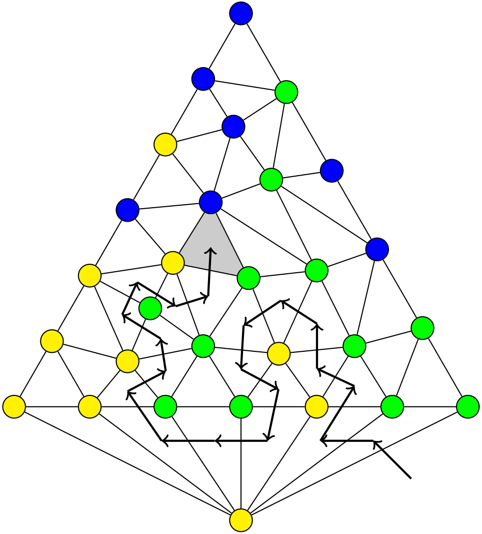
Лемма Шпернера: условие



Лемма Шпернера: построение **PPAD**-графа



Лемма Шпернера: итоговый граф

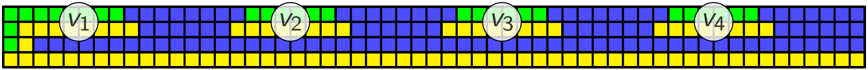


PPAD-полнота леммы Шпернера

- Вместо триангуляции будем рассматривать квадратную решётку
- Красить будем не вершины, а ячейки
- Искать будем узел, с которым граничат ячейки всех цветов
- Будем сводить к такой задаче EOL

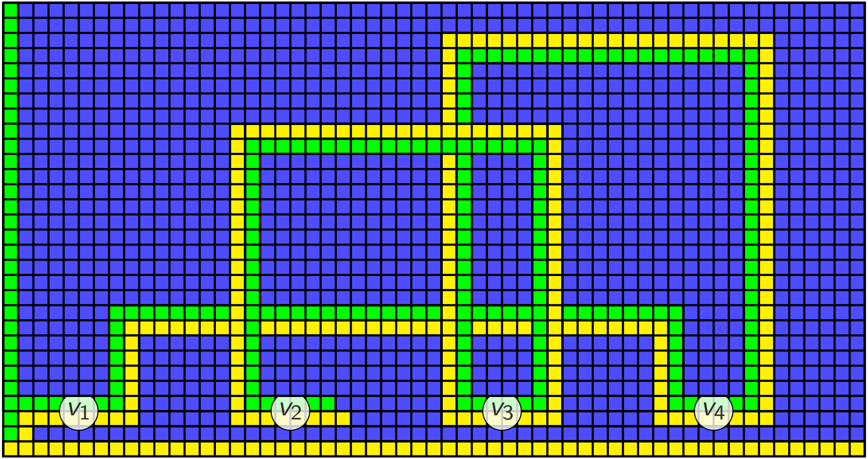
PPAD-полнота леммы Шпернера

- Вместо триангуляции будем рассматривать квадратную решётку
- Красить будем не вершины, а ячейки
- Искать будем узел, с которым граничат ячейки всех цветов
- Будем сводить к такой задаче EOL
- Начало конструкции: «косы» для каждой вершины



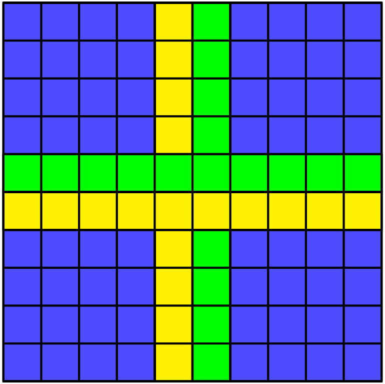
PPAD-полнота леммы Шпернера

Продолжение конструкции: «дамбы», повторяющие рёбра в графе



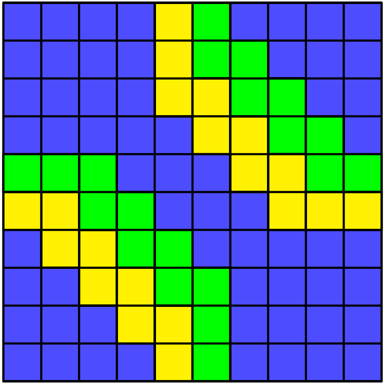
Конфликт

Появляются узлы с разноцветными квадратиками, не соответствующие никакому концу цепочки. Надо их убрать.



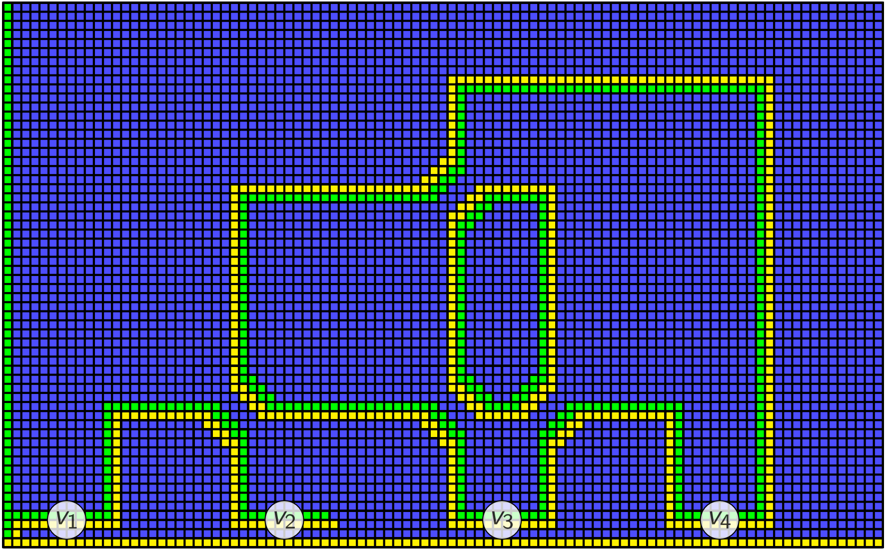
Разрешение конфликта

Появляются узлы с разноцветными квадратиками, не соответствующие никакому концу цепочки. Надо их убрать.



PPAD-полнота леммы Шпернера

Итоговая картина с разрешёнными конфликтами



Ориентированная лемма Шпернера

- Наблюдение: из доказательства следует, что разноцветные симплексы не просто существуют, а их обязательно нечётное число.
- При этом симплексов, чья раскраска имеет ту же ориентацию, что у исходного, на 1 больше, чем симплексов, имеющих противоположную ориентацию
- Задача поиска симплекса той же ориентации лежит в **PPADS** и является полной в этом классе

Теорема Брауэра

Теорема Брауэра

Теорема (Брауэр, 1910)

Пусть f — непрерывная функция из выпуклого компакта M в себя. Тогда существует $x \in M$, такая что $f(x) = x$

Доказательство.

Все компакты переводятся друг в друга, поэтому будем доказывать для симплекса. Покрасим точку в цвет i, если под действием f она не приближается к вершине i. По лемме Шпернера найдётся разноцветный симплекс, который должен оставаться примерно на месте. Далее будем измельчать триангуляцию и возьмём предельную точку. Она будет неподвижной. $\square$

Теорема Брауэра: вычислительная версия

Теорема (Richter, Wong, 1999; Оревков, 1964)

Существует вычислимая f, все неподвижные точки которой невычислимы.

Значит, нельзя надеяться найти неподвижную точку точно, надо искать приближённо. Два подхода:

- Сильная аппроксимация: найти x, т.ч. $|x - x^*| < \varepsilon$, x^* неподвижная
- Слабая аппроксимация: найти x, т.ч. $|f(x) - x| < \varepsilon$

Если выполнено условие Липшица, то из сильной аппроксимации следует слабая. Обратное, вообще говоря, неверно. На самом деле поиск сильного приближения существенно сложнее поиска слабого.

Теорема Брауэра: как задавать функцию?

Теорема (M.D. Hirsch, S. Vavasis, 1987)

Любой алгоритм поиска неподвижных точек, использующий функцию как чёрный ящик, в худшем случае работает экспоненциально долго (от размерности пространства и точности приближения).

Значит, нужно ограничивать класс функций в некотором смысле полиномиально вычислимыми.

Полиномиальная непрерывность и полиномиальная вычислимость

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций, отображающих $[0,1]^d$ в $[0,1]^d$. Отдельная функция $f \in \mathcal{F}$ имеет описание длины n.

Определение

$\mathcal{F}$ называется *полиномиально непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon = 2^{-m} \; \exists \delta = 2^{-k} \; \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

при этом $k = \text{poly}(m, n)$.

Полиномиальная непрерывность и полиномиальная вычислимость

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций, отображающих $[0,1]^d$ в $[0,1]^d$. Отдельная функция $f \in \mathcal{F}$ имеет описание длины n.

Определение

$\mathcal{F}$ называется *полиномиально непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon = 2^{-m}\ \exists \delta = 2^{-k}\ \|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon,$$

при этом $k = \mathrm{poly}(m,n)$.

Определение

$\mathcal{F}$ называется *полиномиально вычислимым*, если по описанию f и двоично-рациональному числу x с m значащими битами можно за время $\mathrm{poly}(m+n)$ вычислить точное значение $f(x)$. (В частности, это значение должно быть двоично-рациональным числом с $\mathrm{poly}(m+n)$ значащими битами).

Теорема Брауэра: окончательная формулировка

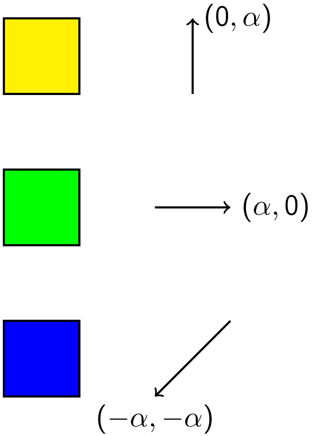
Пусть задано полиномиально непрерывное и полиномиально вычислимое семейство функций $\mathcal{F}$. В вычислительной задаче **BROUWER** требуется по описанию функции f и числу $\varepsilon > 0$ найти x, такое что $\|f(x) - x\| < \varepsilon$.

Теорема

Задача **BROUWER** *лежит в* **PPAD** *в любой размерности и* **PPAD***-полна уже в размерности* 2.

Связь BROUWER и SPERNER

Соответствие между цветами квадратиков и общим направлением сдвига $f(x) - x$



Сводимость BROUWER к SPERNER

Для определения цвета квадратика выбирается x в центре квадратика.

- Нижняя граница и x из внутренности, для которых $f(x)_2 \geqslant x_2$, — в жёлтый
- Левая граница и x из внутренности, для которых $f(x)_1 \geqslant x_1$, — в зелёный
- Верхняя и правая границы и оставшиеся x — в синий

По лемме Шпернера есть узел, вокруг которого три квадратика разных цветов

Сводимость BROUWER к SPERNER

По лемме Шпернера есть узел, вокруг которого три квадратика разных цветов. Он будет приближённо неподвижной точкой

Сводимость BROUWER к SPERNER

По лемме Шпернера есть узел, вокруг которого три квадратика разных цветов. Он будет приближённо неподвижной точкой

Сводимость BROUWER к SPERNER

По лемме Шпернера есть узел, вокруг которого три квадратика разных цветов. Он будет приближённо неподвижной точкой. Подробно: $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{8}$, $\delta < \varepsilon'$ выбрано из полиномиальной непрерывности. Сетка — с шагом δ.

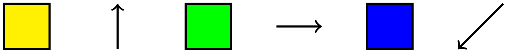
- u — центр зелёного квадратика. Поэтому $u_1 \leqslant f(u)_1$.

$$y_1 - f(y)_1 \leqslant (y_1 - u_1) + (u_1 - f(u)_1) + (f(u)_1 - f(y)_1) < 2\varepsilon'$$

- Аналогично $y_2 - f(y)_2 < 2\varepsilon'$
- w — центр синего квадратика: $w_1 + w_2 \geqslant f(w_1) + f(w_2)$. Аналогично получаем $f(y)_1 + f(y)_2 - y_1 - y_2 < 4\varepsilon'$
- В итоге $\|f(y) - y\| < 8\varepsilon' < \varepsilon$.

Сводимость SPERNER к BROUWER

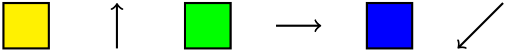
Пусть задана раскраска квадратной таблицы. В центрах квадратиков определим сдвиг исходя из соответствия между цветами и векторами.



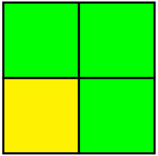
В остальных точках интерполируем кусочно-линейно. Неподвижная точка обязана быть окружена квадратиками трёх разных цветов. Иначе есть общее направление движения.

Сводимость SPERNER к BROUWER

Пусть задана раскраска квадратной таблицы. В центрах квадратиков определим сдвиг исходя из соответствия между цветами и векторами.

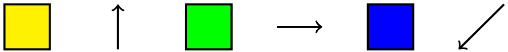


В остальных точках интерполируем кусочно-линейно. Неподвижная точка обязана быть окружена квадратиками трёх разных цветов. Иначе есть общее направление движения.

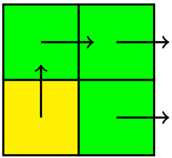


Сводимость SPERNER к BROUWER

Пусть задана раскраска квадратной таблицы. В центрах квадратиков определим сдвиг исходя из соответствия между цветами и векторами.

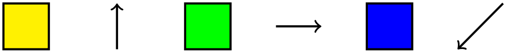


В остальных точках интерполируем кусочно-линейно. Неподвижная точка обязана быть окружена квадратиками трёх разных цветов. Иначе есть общее направление движения.

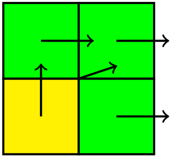


Сводимость SPERNER к BROUWER

Пусть задана раскраска квадратной таблицы. В центрах квадратиков определим сдвиг исходя из соответствия между цветами и векторами.



В остальных точках интерполируем кусочно-линейно. Неподвижная точка обязана быть окружена квадратиками трёх разных цветов. Иначе есть общее направление движения.



Теорема Какутани

Многозначные функции

Определение

Многозначной функцией $F\colon A \rightrightarrows B$ называется функция $F\colon A \to 2^B$.

Определение

Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, причём значения F непусты и замкнуты. Тогда F называется *полунепрерывной сверху* (upper hemicontinuous) в точке x, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in B_\delta(x)\ F(x') \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

Теорема

F полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда её график замкнут.

Неподвижные точки многозначной функции

Теорема (Какутани, 1941)

Пусть F есть многозначное полунепрерывное сверху отображение n-мерного шара в себя, имеющее непустые, компактные и выпуклые образы. Тогда существует точка x, такая что $x \in F(x)$.

Идея доказательства.

- Построить непрерывную однозначную функцию (неймановское приближение), чей график лежит в ε-окрестности графика F
- Найти неподвижную точку полученной функции по теореме Брауэра
- Устремить ε к нулю, найти предельную точку у полученных неподвижных точек и доказать, что она неподвижная для исходного F

Проблема с вычислительной постановкой

Пусть $F(x)$ на шаре определена так:

- Если $x \neq y$, то $F(x)$ есть точка пересечения луча xy и границы шара
- А если $x = y$, то $F(x)$ — весь шар

Тогда y будет не только единственной неподвижной точкой, но и единственной приближённо неподвижной точкой для малых ε! А точный поиск неподвижной точки предположительно сложнее, чем **PPAD**.

Правильная постановка KAKUTANI

- **Дано:** описание многозначной функции F
- **Найти:** точку x, в ε-окрестности которой найдётся y, для которой $\mathrm{dist}(y, F(y)) < \varepsilon$
- Допущение шевеления аргумента позволяет избавиться от требования полиномиальной непрерывности
- Предположение о структуре F: все значения являются многогранниками, систему линейных неравенств, задающую многогранник, можно вычислить за полиномиальное время.

KAKUTANI полна в **PPAD**

- **PPAD**-трудность: BROUWER является частным случаем для однозначных полиномиально непрерывных функций. Полиномиальная непрерывность гарантирует, что точки, близкие к приближённо неподвижным, также приближённо неподвижные с худшим приближением
- Принадлежность к **PPAD**: нужно свести KAKUTANI к BROUWER. Это делается при помощи тех же идей, что и доказательство теоремы Какутани:
  - Эффективным образом строится неймановское приближение (опять интерполяция значений по мелкой сетке).
  - Приближённо неподвижная точка будет приближённо неподвижной и для исходной функции

Равновесие Нэша

Игры в нормальной форме

- Список игроков: $1, \ldots, n$
- Конечные множества стратегий: $S_1, \ldots, S_n$
- Функции выигрыша $u_1, \ldots, u_n$:

$$u_i \colon S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$$

- Обозначение: $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$
- *Равновесием Нэша* называется набор $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, такой что

$$\forall i \; \forall s_i \; u_i(s_i, s_{-i}^*) \leqslant u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$$

Поиск равновесия Нэша

- Чистое равновесие Нэша может не существовать
- При полной записи выигрышей оно находится за полиномиальное время полным перебором
- При сжатой записи общего вида это **NP**-полная задача (Gottlob, Greco, Scarcello, 2005)
- Для класса потенциальных игр равновесие всегда существует, при сжатой записи оно лежит в классе **PLS**
- Некоторые конкретные подклассы потенциальных игр также будут **PLS**-полными (например, congestion games)

Смешанное равновесие Нэша

- Строится *расширенная игра* со смешанными стратегиями и ожидаемыми выигрышами
- Смешанные стратегии — распределения вероятностей на чистых стратегиях
- Выигрыши — математическое ожидание при независимом выборе стратегий всеми игроками
- Смешанное равновесие — равновесие в расширенной игре

Теорема (Нэш, 1950)

В любой конечной игре существует смешанное равновесие.

Идея доказательства.

Рассматривается отображение пары смешанных стратегий в пару наилучших ответов. По теореме Какутани у него будет неподвижная точка, которая и будет равновесием. □

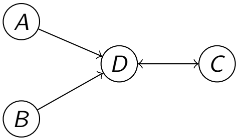
Вычислительная постановка

- Все разумные вопросы с бинарным ответом **NP**-полные (Gilboa, Zemel, 1989)
- Задача поиска NASH: по игре в нормальной форме и числу ε найти ε-равновесие
- Задача поиска 2NASH: по игре двух лиц в нормальной форме найти точное равновесие (оно обязательно будет рациональным)
- Обе задачи лежат в **PPAD** (для NASH по теореме Какутани, для 2NASH исходя из алгоритма Лемке-Хоусона)
- Обе являются **PPAD**-полными (довольно сложно, особенно для 2NASH)
- При этом алгоритм Лемке-Хоусона может работать экспоненциально долго (Savani, von Stengel, 2006), более того, задача поиска любого равновесия, возникающего в нём, является **PSPACE**-полной (Goldberg, Papadimitriou, Savani, 2013)

PPAD-полнота NASH и 2NASH: идея доказательства

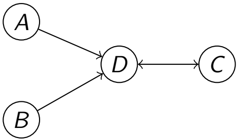
- Графическая игра: задан некоторый граф, выигрыш каждого игрока зависит только от действий соседних игроков
- Работа арифметической схемы моделируется при помощи графической игры с большим числом участников
- Затем эта игра моделируется небольшим числом игроков-«адвокатов», представляющих игроков исходной игры
- При помощи вариаций графической игры удалось снизить число «адвокатов» до 4, 3, а затем и до 2.
- Более того, **PPAD**-полнота сохраняется для *разреженных игр*: на выигрыш одного игрока влияет только константное число стратегий другого.

Графическая игра для умножения



- Каждый игрок имеет ровно 2 стратегии: 0 и 1.
- Вероятности выбрать стратегию 1: a для игрока A, b для B, c для C.
- C выигрывает 1, если играет **не** то же самое, что D, и 0 иначе
- Если D выбирает 1, то выигрывает 1, если C тоже играет 1, и 0 иначе
- Если D выбирает 0, то выигрывает 1, если и A, и B играют 1, и 0 иначе

Графическая игра для умножения



- Каждый игрок имеет ровно 2 стратегии: 0 и 1.
- Вероятности выбрать стратегию 1: a для игрока A, b для B, c для C.
- C выигрывает 1, если играет **не** то же самое, что D, и 0 иначе
- Если D выбирает 1, то выигрывает 1, если C тоже играет 1, и 0 иначе
- Если D выбирает 0, то выигрывает 1, если и A, и B играют 1, и 0 иначе
- В равновесии должно быть $c = ab$

Графическая игра для схемы

- Аналогичные гаджеты строятся для других простых арифметических функций
- Берётся арифметическая схема, вычисляющая функцию, для которой ищется неподвижная точка
- Все элементы заменяются на гаджеты, и схема «замыкается на себя»: исходные данные и результат представляются одними и теми же элементами
- Приближённое равновесие в такой игре будет соответствовать приближённой неподвижной точке
- Важная техническая деталь: среди прочего требуются гаджеты для сравнения чисел (для извлечения битов двотчного разложения числа). Они не могут быть реализованы точно, из-за этого нужно отдельно обрабатывать возможные ошибки вблизи двоично-рациональных чисел.

Моделирование графической игры при помощи обычной

- Игроки как «адвокаты» — представители вершин
- Стратегия игрока: выбрать одну из своих вершин и её стратегию
- Первая проблема: конфликт интересов (игра с самим собой)
  - Решение: распределяем вершины так, чтобы конфликтов не было.
- Вторая проблема: предпочтение одних вершин другим
  - Решение: параллельная игра типа «Камень, ножницы, бумага» с большими ставками, так чтобы все вершины выбирались примерно равновероятно.

О степени аппроксимации

- Стандартные соображения: **PPAD**-трудно приблизить равновесие с экспоненциальной точностью
- Алгоритм Lipton-Markakis-Mehta, 2004: поиск приближения за $n^{O(\log(n/\varepsilon^2))}$
- Теорема Chen-Deng-Teng, 2007: поиск приближения с точностью n^{-c} также **PPAD**-полон
- Aviad Rubinstein, 2016: при условии экспоненциальной гипотезы для **PPAD** для некоторой константы ε вычисление ε-равновесия требует $n^{\log^{1-o(1)} n}$ шагов

Сильная аппроксимация

- Класс **FIXP**: дана функция в виде арифметической схемы, найти точку на расстоянии ε от неподвижной
- Etessami, Yannakakis, 2007: существует игра, у которой есть $\frac{1}{2^{2^{\mathrm{poly}(n)}}}$-равновесие на расстоянии 1 от единственного точного равновесия
- Вычисление равновесия в игре с 3 игроками — **FIXP**-полная задача
- При помощи алгоритма для поиска точки, близкой к равновесию, можно решить известные сложные задачи SqrtSum и PosSLP.

Спасибо!

mailto:musatych@gmail.com