Кривые и поверхности в компьютерной графике

материалы занятий: https://compsciclub.ru/courses/graphics2018/2018-autumn/classes/
дублируются на сайте: http://www.school30.spb.ru/cgsg/cgc2018/

Представления кривых на плоскости

- явный способ (explicit curves)

$$y = f(x)$$

$$y = \sin(x)$$

- неявный способ (implicit)

$$f(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

- Параметрический способ (parametric curves)

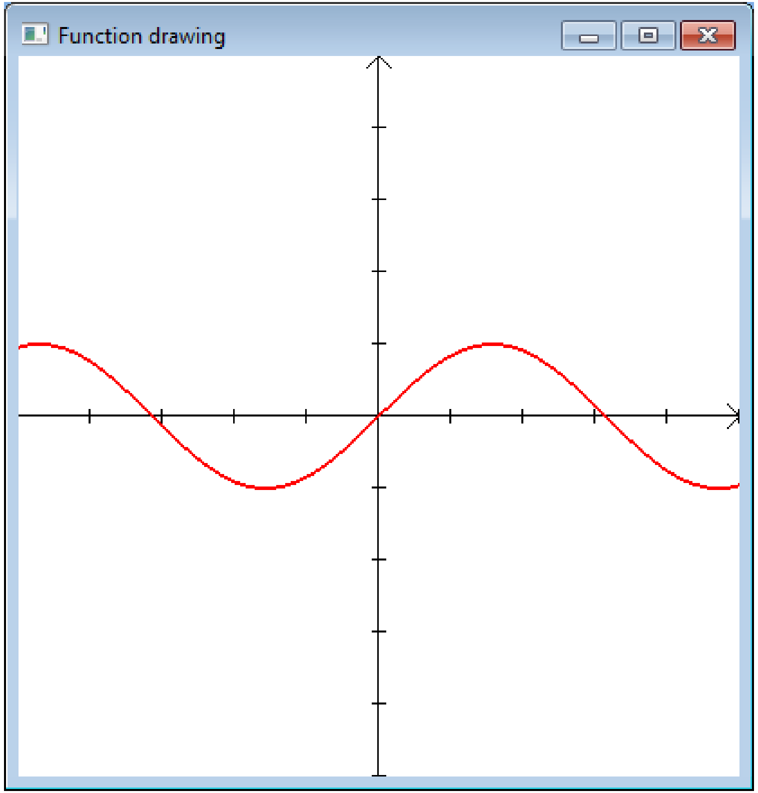
$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}, t \in [a,\ b]$$

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in [0,\ 2\pi)$$

Явные кривые

```
x = MinX;
MoveTo(x, F(x));
while (x <= MaxX)
{
  LineTo(x, F(x));
  x = x + Step;
}
```

$$y = \sin(x)$$



Неявные кривые

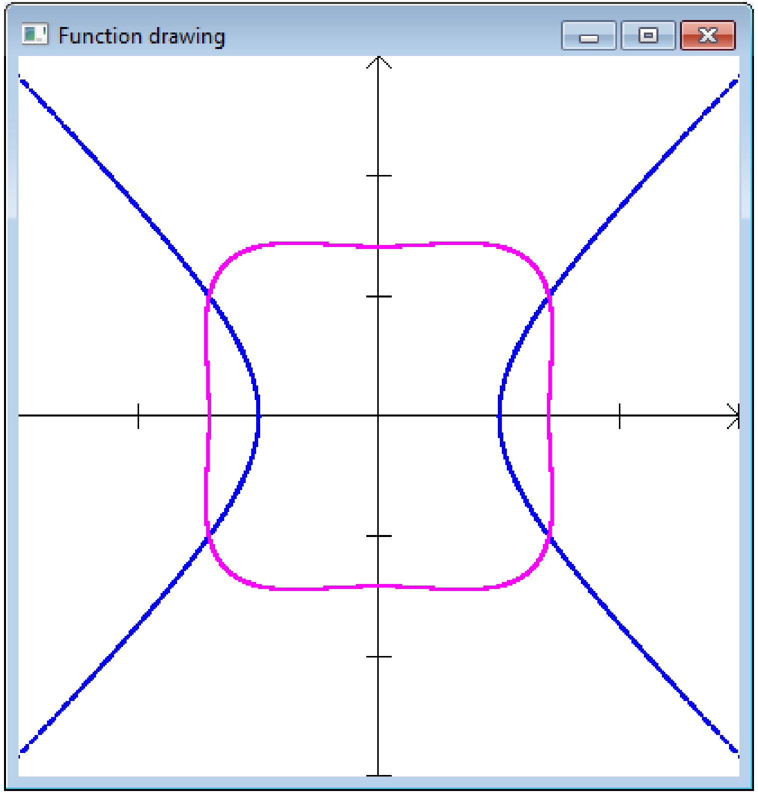
```
y = MinY;
while (y <= MaxY)
{
  x = MinX;
  while (x <= MaxX)
  {
    f = F(x, y);

    if (f > -EPS && f < EPS)
      SetPixel(x, y);

    x = x + Step;
  }
  y = y + StepY;
}
```

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

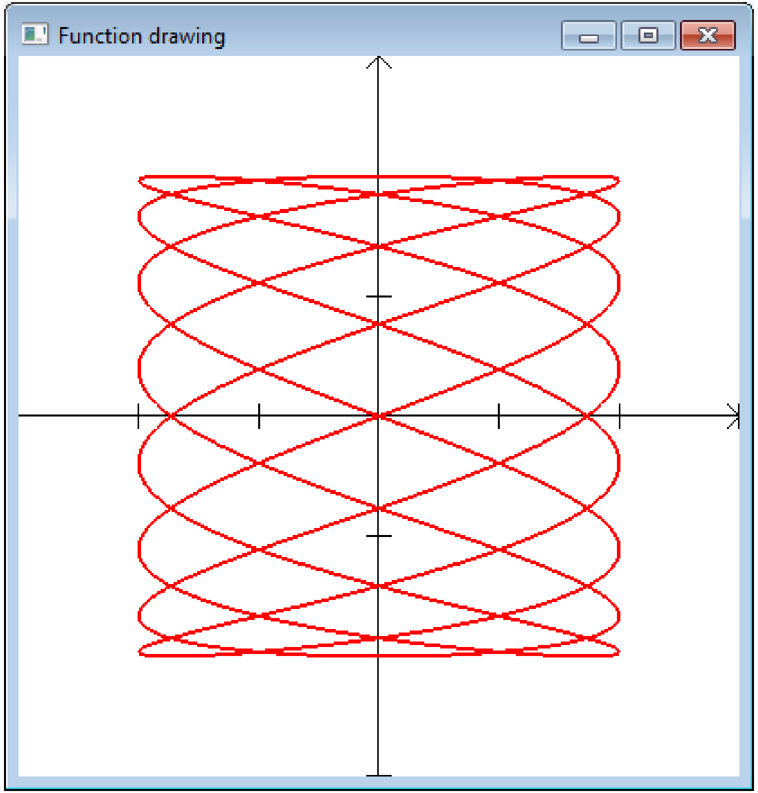
$$x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2 = 0$$



Параметрические кривые

```
t = A;
x = Fx(t);
y = Fy(t);
MoveTo(x, y);
while (t <= B)
{
  x = Fx(t);
  y = Fy(t);
  LineTo(x, y);
  t = t + Step;
}
```

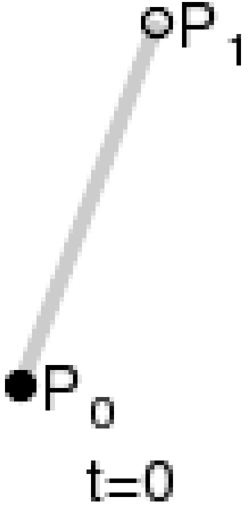
$$\begin{cases} f_x(t) = 2\cdot\sin(8\cdot t) \\ f_y(t) = 2\cdot\sin(3\cdot t) \end{cases}$$



- Линейные кривые Безье
  - Линейная интерполяция между концевыми точками

$$B = P_0 \cdot (1 - t) + P_1 \cdot t$$

$$t \in [0, 1]$$

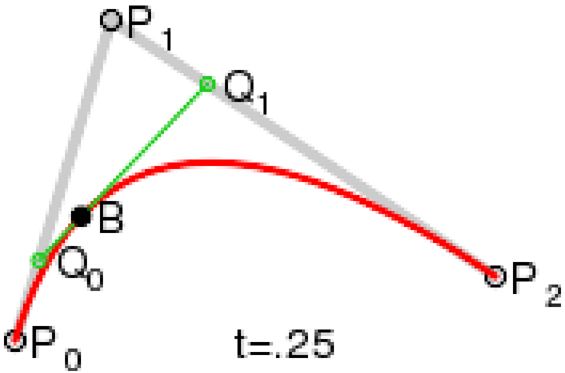


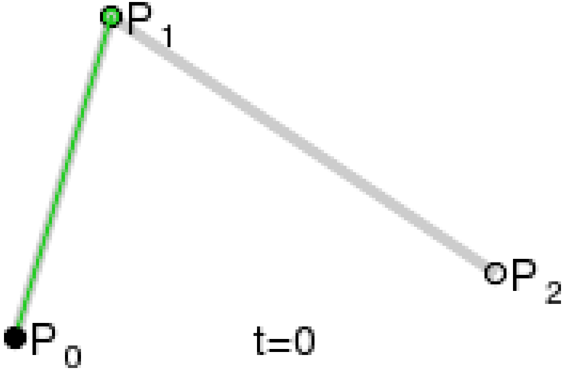
- Квадратичные кривые Безье
  - Композиция нескольких линейных кривых:

$$Q_1 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_2 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

$$B = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t = P_0 \cdot (1-t)^2 + 2 \cdot P_1 \cdot (1-t) \cdot t + P_2 \cdot t^2$$

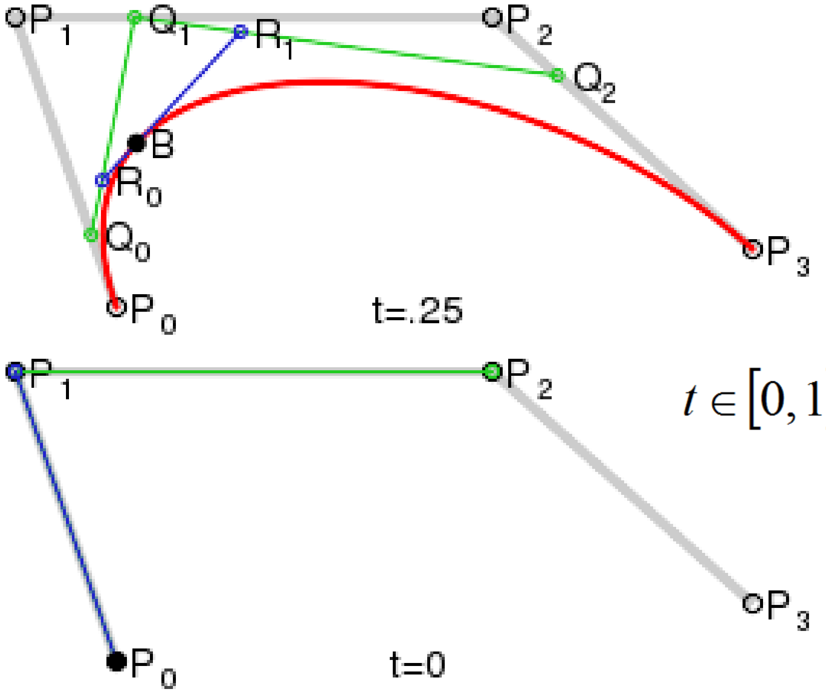




$$t \in [0, 1]$$

Кривые Безье: кубические

- Кубические кривые Безье



$$t \in [0,1]$$

$$Q_0 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_1 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

$$Q_2 = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$

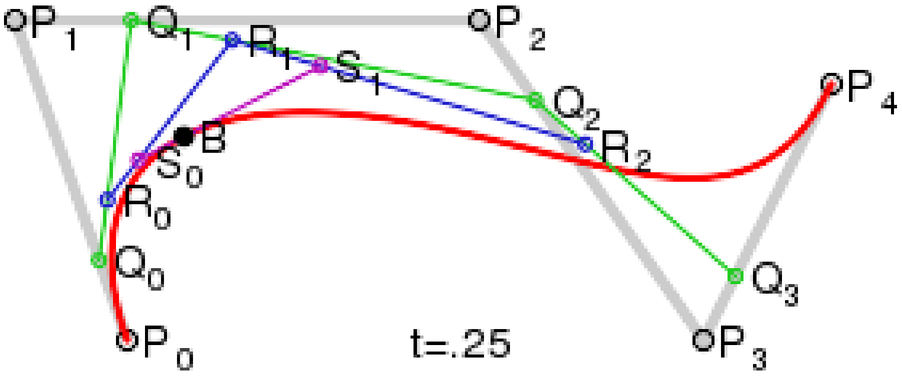
$$R_0 = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t$$

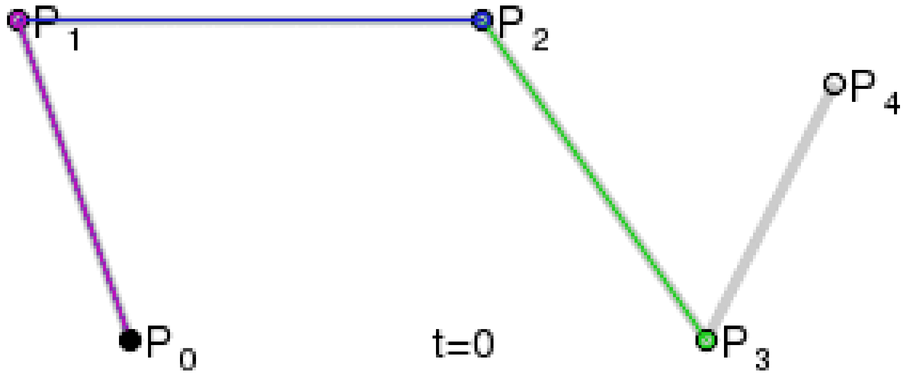
$$R_1 = Q_1 \cdot (1-t) + Q_2 \cdot t$$

$$B = R_0 \cdot (1-t) + R_1 \cdot t =$$

$$= P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3$$

Кривые Безье: старшие степени





- В общем случае:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)$$

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$ полином Бернштейна

$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$ число сочетаний

Кубические кривые Безье: матричная запись

$$B(t) = P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3 =$$

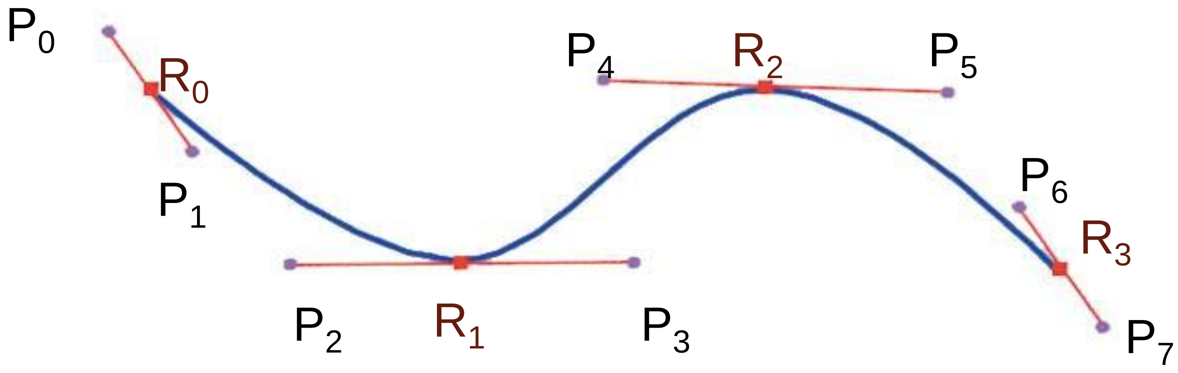
$$= t^3 \cdot (-P_0 + 3 \cdot P_1 - 3 \cdot P_2 + P_3) + t^2 \cdot (3 \cdot P_0 - 6 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2) +$$

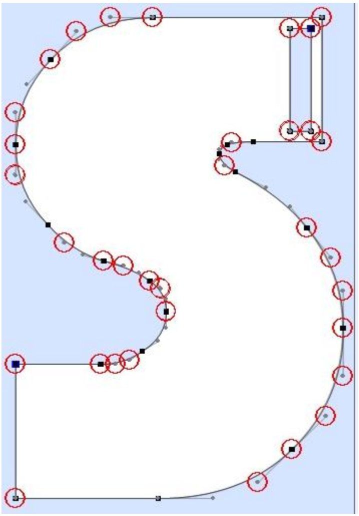
$$t \cdot (-3 \cdot P_0 + 3 \cdot P_1) + P_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

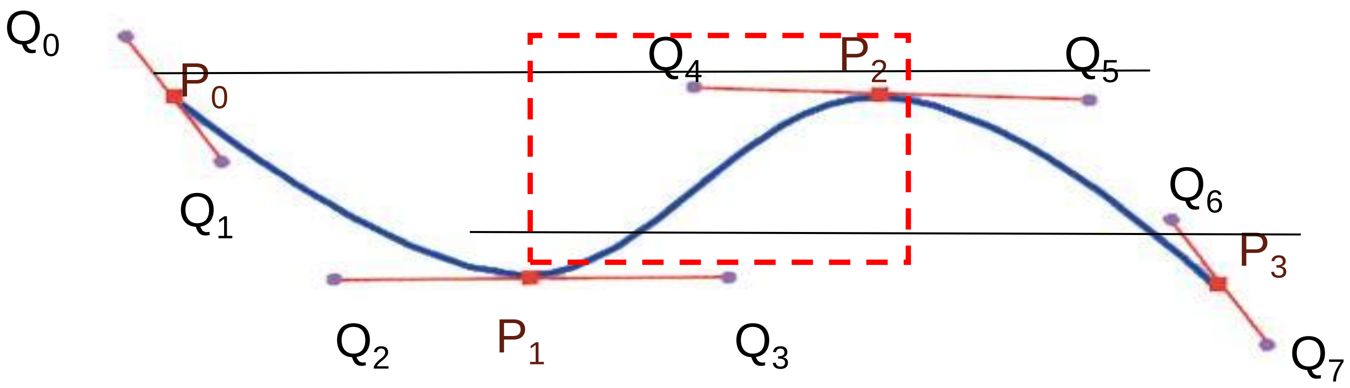
$$B(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot M_B \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

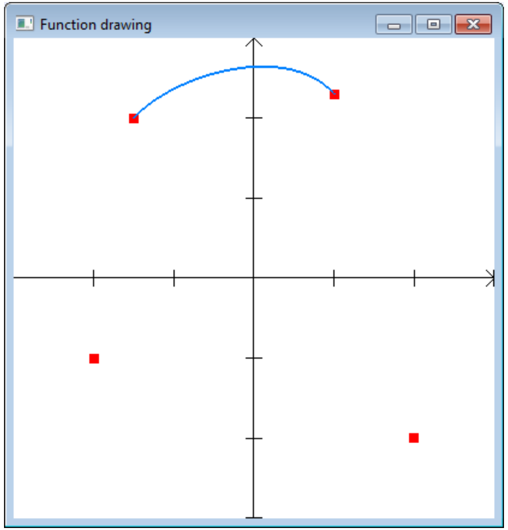
Сопряжение кривых Безье





Интерполяция с помощью кривых Безье

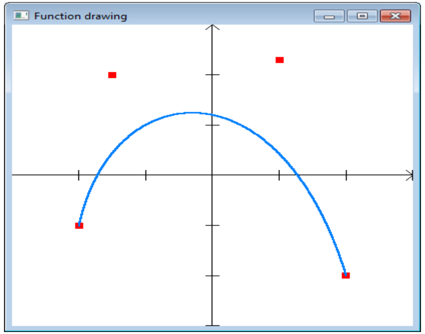




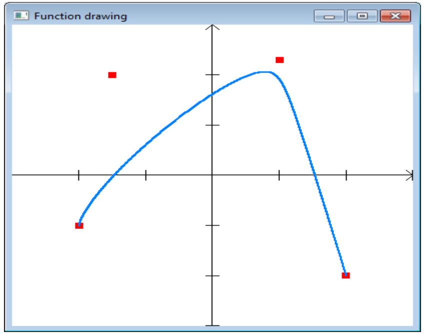
- $$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Рациональные кривые Безье (rational)

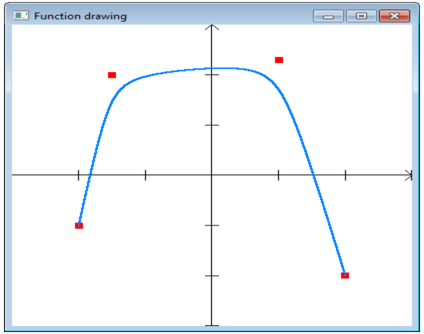
$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}, \quad 0 \le t \le 1$$



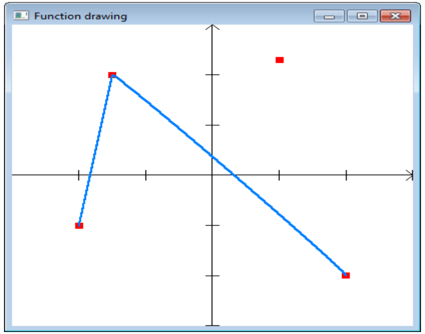
w=(1, 1, 1, 1)



w=(1, 1, 10, 1)



w=(1, 30, 30, 1)



w=(1, 1000, 1, 1)

B-сплайны (B-splines)

- Кокс и де Бур:

$$P(t)=\sum_{i=1}^{n+1} P_i \cdot N_{i,k}(t), \quad t_{\min} \le t \le t_{\max}, \quad 2 \le k \le n+1$$

$$N_{i,1}=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_i \le t \le x_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,k}=\frac{(t-x_i)\cdot N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1}-x_i}+\frac{(x_{i+k}-t)\cdot N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}},$$

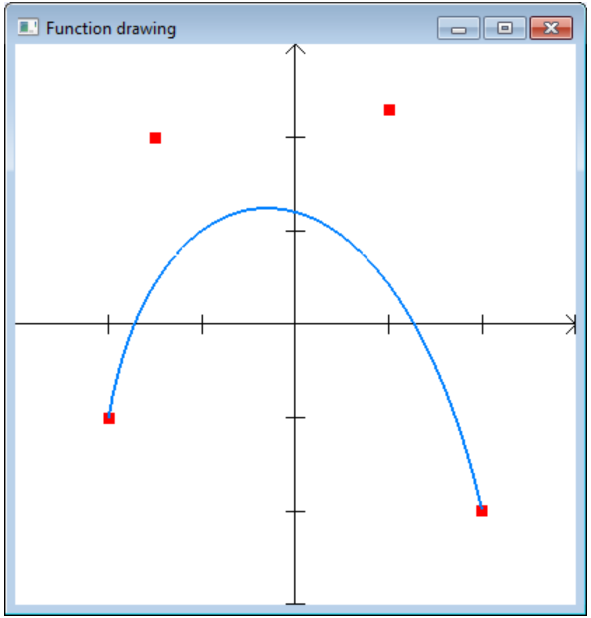
полагаем $\frac{0}{0}=1$

$x=[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_{n+k+1}]$ - узловой вектор

Примеры B-сплайнов (кривая Безье)

- Кубическая кривая Безье:

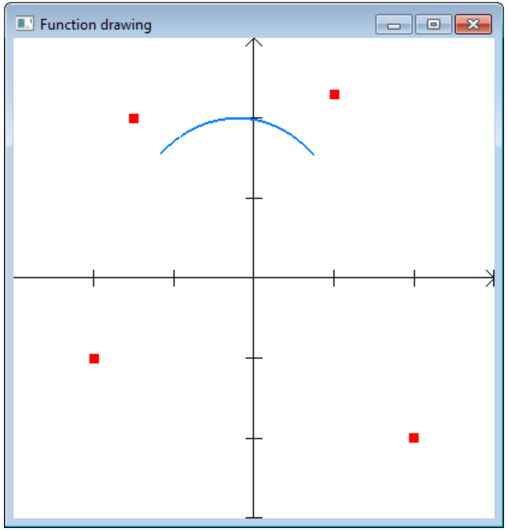
$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

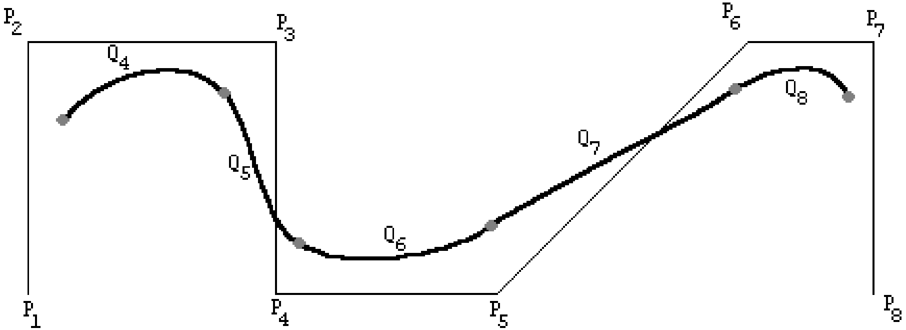


Примеры B-сплайнов (uniform)

- Униформный кубический B-spline

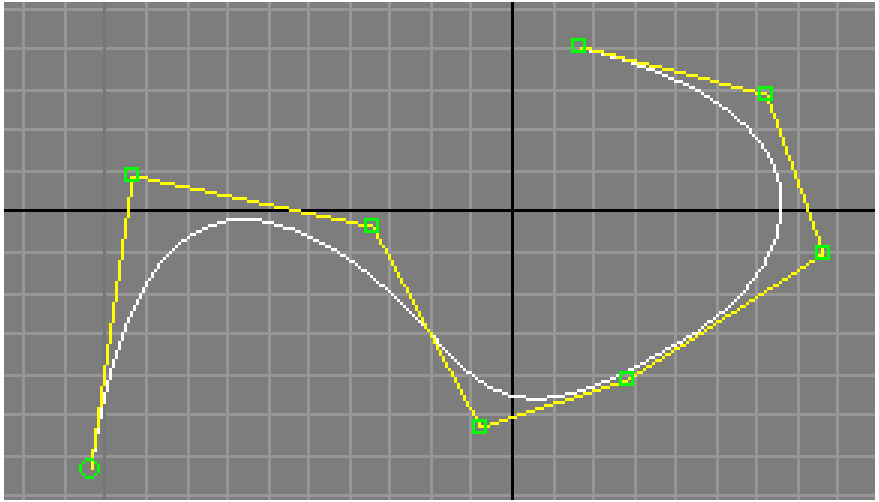
$$P(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_i\\ P_{i+1}\\ P_{i+2}\\ P_{i+3}\end{bmatrix}$$





- NURBS

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_i P_i \cdot N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i \cdot N_{i,k}(t)}$$



Поверхности (surfaces)

- явный способ

$$z = f(x, y)$$

- неявный способ

$$f(x, y, z) = 0$$

- параметрический способ

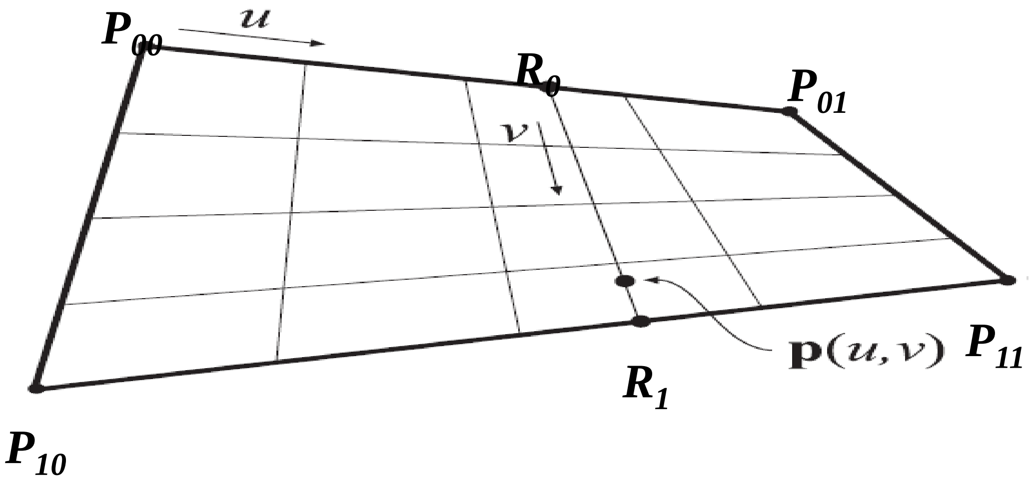
$$\vec{P} = \vec{F}(u, v)$$

Повехности Безье: билинейные

$$R_0 = P_{00} \cdot (1-u) + P_{01} \cdot u$$

$$R_1 = P_{10} \cdot (1-u) + P_{11} \cdot u$$

$$P(u,v) = R_0 \cdot (1-v) + R_1 \cdot v$$



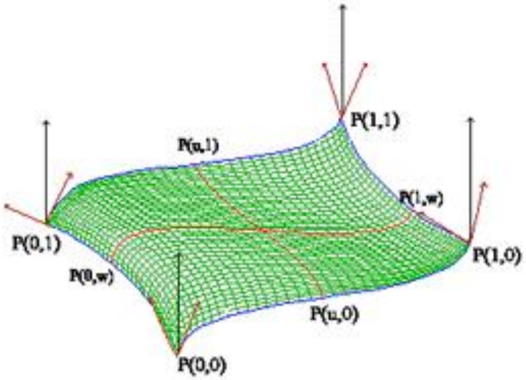
Поверхность Кунса

- Граничные кривые:

$$P(u,0), P(u,1), P(0,v) \ \text{и} \ P(1,v)$$

- Билинейно смешиваем (учитывая повторение угловых точек):

$$Q(u,v) = P(u,0)\cdot(1-v) + P(u,1)\cdot v +$$
$$P(0,v)\cdot(1-u) + P(1,v)\cdot u$$
$$-P(0,0)\cdot(1-u)\cdot(1-v) - P(0,1)\cdot(1-u)\cdot v$$
$$-P(1,0)\cdot u\cdot(1-v) - P(1,1)\cdot u\cdot v$$

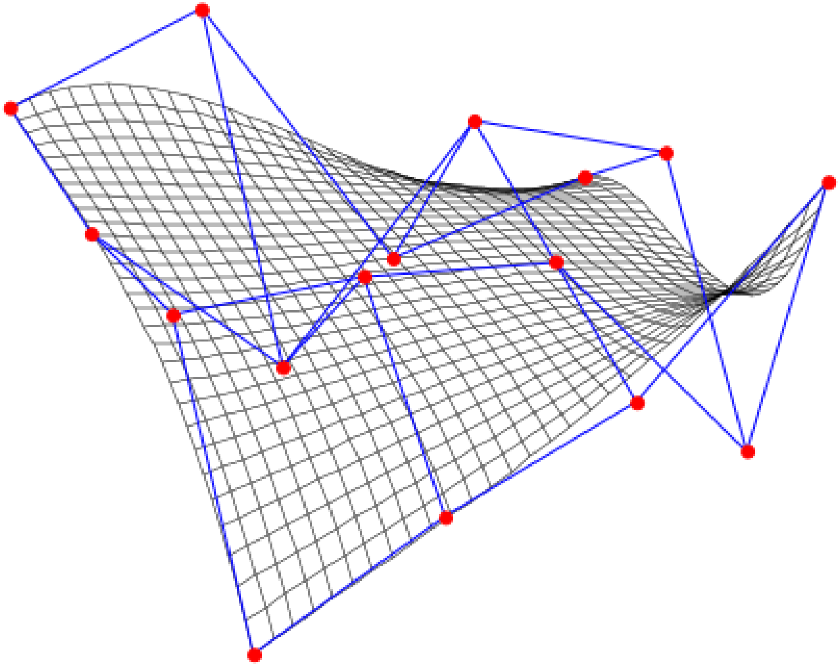


Поверхности Безье (общий случай)

$$B(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{ij}\cdot\mathbf{b}_{j,m}(u)\cdot\mathbf{b}_{i,n}(v),\quad u,v\in[0,1]$$

$$\mathbf{b}_{i,n}(t)=C_n^i\cdot t^i\cdot(1-t)^{n-i}$$

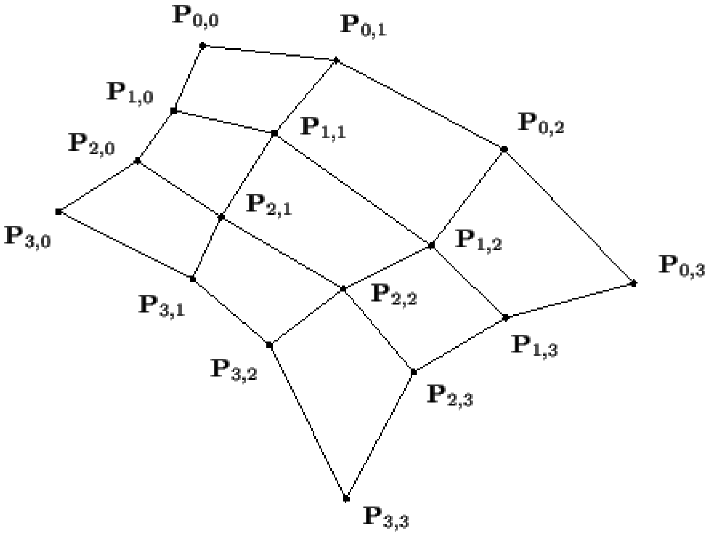
$$C_n^i=\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$



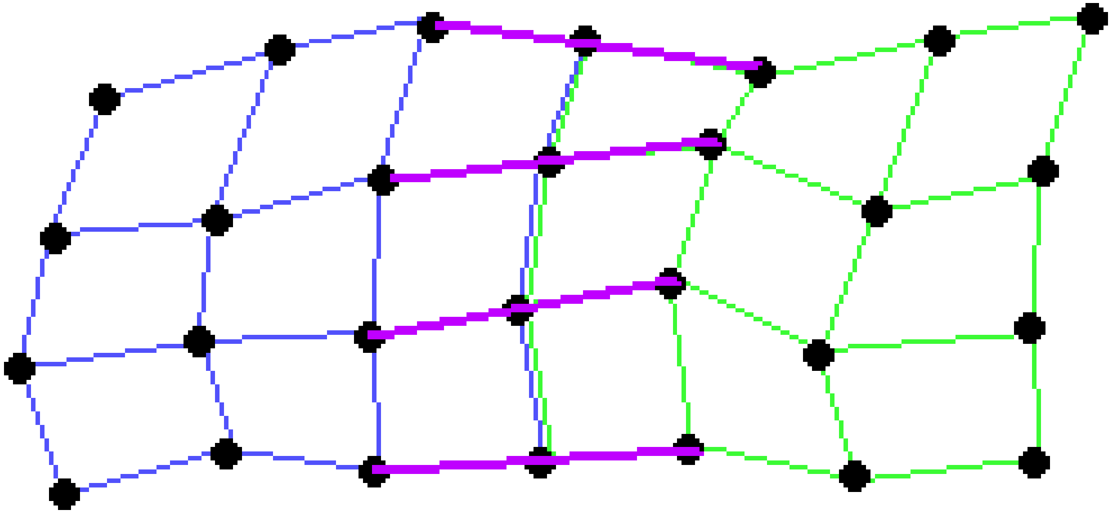
Бикубическая поверхность Безье

$$B(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\cdot M_B\cdot\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03}\\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}\cdot M_B^T\cdot\begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$

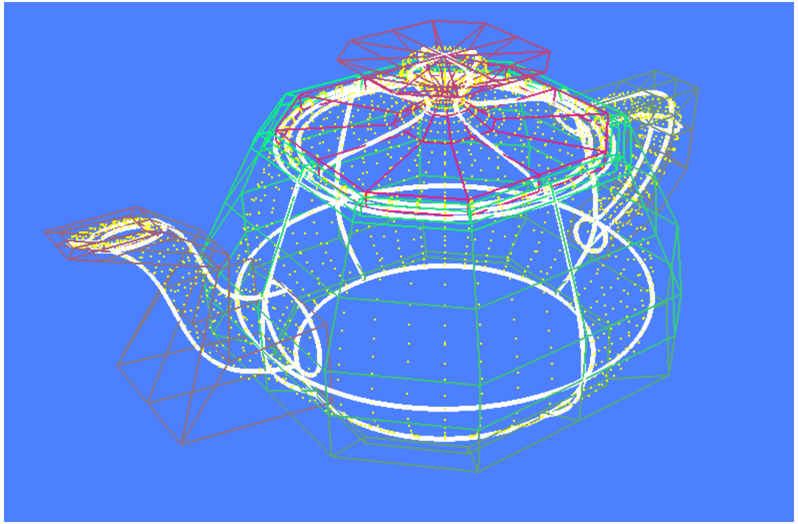
$$M_B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



Бикубическая поверхность Безье: сопряжение



Бикубическая поверхность Безье: пример



Общий случай бикубических поверхностей

$$B(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

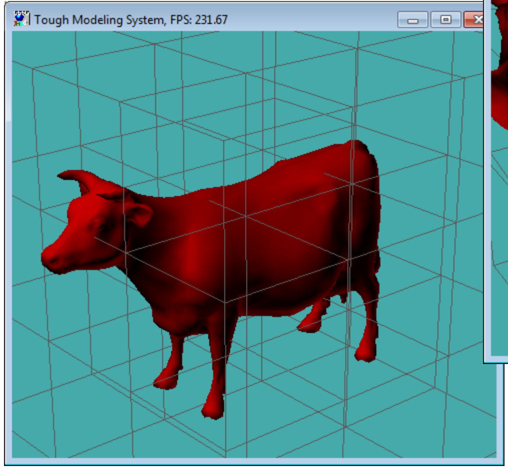
uniform B-spline — cubic Bezier — Catmull-Rom

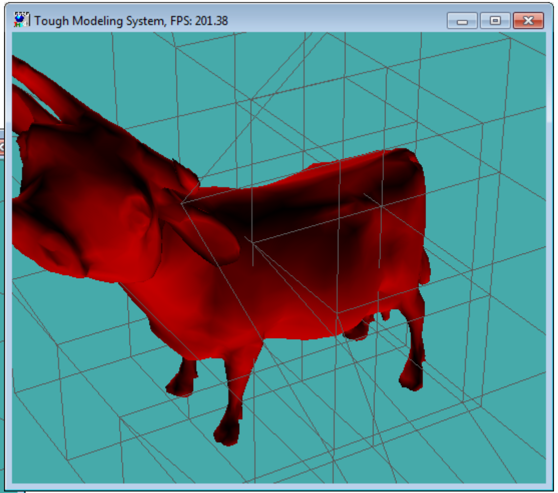
Трикубические пространства: Free Form Deformation

$$B(u,v,w)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}P_{ijk}\cdot\mathbf{b}_{k,l}(w)\cdot\mathbf{b}_{j,m}(u)\cdot\mathbf{b}_{i,n}(v),\quad w,u,v\in[0,1]$$

$$\mathbf{b}_{i,n}(t)=C_n^i\cdot t^i\cdot(1-t)^{n-i}$$

$$C_n^i=\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$





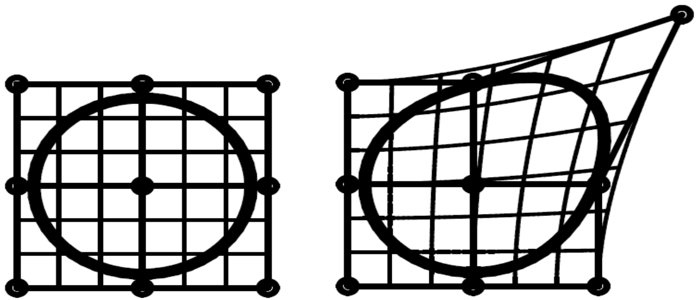
Задание

- **Построение плоских кривых:**

  Реализовать интерактивную среду демонстрации параметрических кубических кривых (выполнять интерполяцию по нескольким точкам, использовать uniform B-spline и/или сплайн Катмула-Рома).
  Дополнительное задание: реализовать изменение весов точек и визуализацию рациональными кривыми.

- **Плоская деформация:**

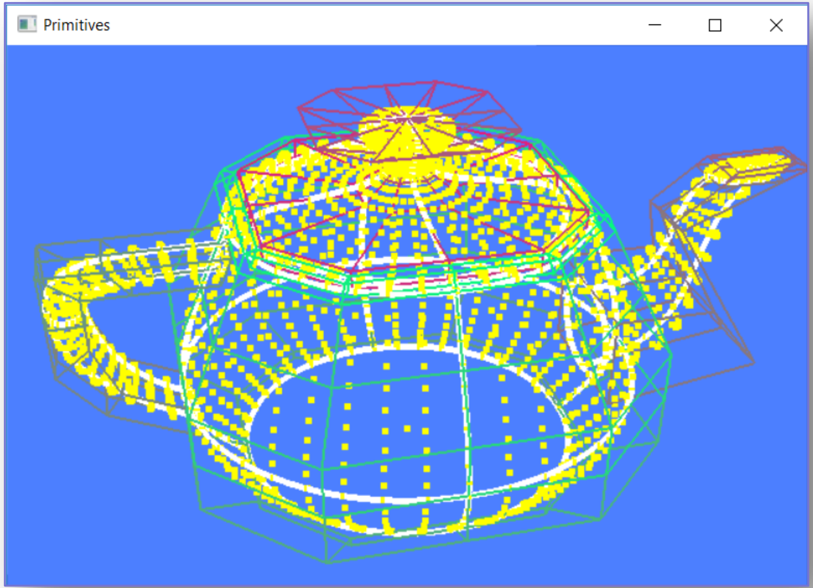
  Реализовать интерактивную среду демонстрации FFD на плоскости для растрового изображения. Использовать биквадратную «сетку» (9 точек) Безье.



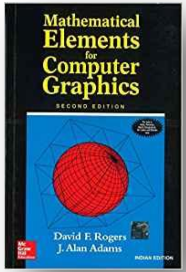
Задание

- **Построение бикубических поверхностей Безье:**

  Реализовать построение объемных фигур, состоящих из бикубических поверхностей Безье. Координаты опорных точек заданы текстовым файлом.



Литература



David F. Rodgers, J. van Adams. **«Mathematical Elements for Computer Graphics»**, 2nd ed., McGraw-Hill Publishing Company, 1990.

Роджерс Д., Адамс Дж. «**Математические основы машинной графики»**, М.: Мир, 2001. 604 с.

Е.Шикин, А.Плис. ***«Кривые и поверхности на экране компьютера»***, М: Диалог-МИФИ, 1996.

Е.В.Шикин, М.М.Франк-Каменецкий. ***"Кривые на плоскости и в пространстве“***, М: "ФАЗИС", 1997.