Задание 6 (на 17.10).

$\boxed{\textbf{CS 31.}}$ Рассмотрим множество матриц $\mathcal{A} \subseteq \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$, которые обладают следующими свойствами:

- в любом столбце не более двух ненулевых элементов;
- существует такое разбиение множества строк на классы X, Y, что для любого столбца j, в котором ровно два ненулевых элемента верно: $\sum\limits_{i \in X} a_{i,j} = \sum\limits_{i \in Y} a_{i,j}$.

Докажите, что:
а) данное множество замкнуто относительно перехода к подматрице;
б) если в любом столбце матрицы $A \in \mathcal{A}$ два ненулевых элемента, то $det(A) = 0$;
в) если $A \in \mathcal{A}$, то A — тотально унимодулярна.

$\boxed{\textbf{CS 32.}}$ Пусть дан граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, $x \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. $\sum_{e \in E} x_e \to max$, $\forall e \in E \quad x_e \geq 0$, $\forall v \in V \quad \sum_{e, v \in \delta(e)} x_e \leq 1$, где $\delta(e)$ — множество концов ребра e.

Докажите, что если граф G двудольный, то матрица данной задачи является тотально унимодулярной.

Пусть $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ некоторая функция. Деревом решений для функции f назовем бинарное корневое дерево, в котором каждая внутренняя вершина помечена некоторой переменной x_i, а лист значением 0 или 1. Ребра помечены значениями 0 или 1, причем у каждой внутренней вершины один сын помечен ребром 0, а другой 1. Вычисление значения $f(x_1, \ldots, x_n)$ начинается от корня. Проходя внутреннюю вершину, мы спрашиваем значение входной переменной, которая соответствует метке вершины, после чего переходит в соответствующее поддерево. Дойдя до листа мы выдаем значение, которое написано в нем.

Запросовой сложностью функции f называется величина $D(f)$ равная минимальной глубине дерева, которое считает данную функцию.

$\boxed{\textbf{CS 33.}}$ Рассмотрим функцию $f = Maj(x_1, x_2, x_3)$, которая возвращает бит, который чаще встречается на входе. Докажите, что $D(f) = 3$.

$\boxed{\textbf{CS 34.}}$ Рассмотрим функцию $f = \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i$. Докажите, что $D(f) = n$.

$\boxed{\textbf{CS 24.}}$ Докажите, что если существует унарный NP-полный язык, то $P = NP$.

$\boxed{\textbf{CS 25.}}$ Рассмотрим полиэдр $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Матрица A имеет размер m на n и ее строки линейно независимы. Доказать, что число вершин этого полиэдра не превосходит числа сочетаний из n по m.

$\boxed{\textbf{CS 26.}}$ Докажите, что если полиэдр $P = \{x \mid Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ не пуст, то он имеет вершину тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен n.

$\boxed{\textbf{CS 27.}}$ Докажите, что любая точка выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$ есть выпуклая комбинация не более, чем $n + 1$ вершины.

$\boxed{\textbf{CS 29.}}$ Рассмотрим полиэдр $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, где b — вектор с целочисленными координатами, а матрица A — тотально унимодулярна. Докажите, что все вершины данного полиэдра имеют целочисленные координаты.

$\boxed{\textbf{CS 30.}}$ Пусть дан граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, $x \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. $\sum_{e \in E} x_e \to max$, $\forall e \in E \quad x_e \geq 0$, $\forall v \in V \quad \sum_{e, v \in \delta(e)} x_e \leq 1$, где $\delta(e)$ — множество концов ребра e.

а) Какой "физический" смысл у данной задачи? А если вектор x имеет целочисленные координаты?

б) Докажите, что если граф G двудольный, то оптимум достигается в вершине с целочисленными координатами.