Computer Science Center
Основы дискретной математики
Домашнее задание №1

11 сентября 2013 г.

1. [1] Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

2. [1] Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «метаматематика»?

3. [2] Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из символов '0' и '1') строк длины n, в которых ровно k единиц, при этом никакие две единицы не стоят рядом?

4. [1] Докажите *тождество Вандермонда*:

$$C_{n+m}^{k}=\sum_{i=0}^{k}C_n^i\cdot C_m^{k-i}.$$

5. [1] С помощью *формулы суммирования по верхнему индексу* $\sum_{m=0}^{n}C_m^k=C_{n+1}^{k+1}$ выразите значение следующей суммы через полином от n:

$$\sum_{i=0}^{n}i^3.$$

6. [1] n-разбиением числа k назовём упорядоченный набор неотрицательных целых чисел a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, для которого верно, что $\sum_{i=1}^{n}a_i=k$. Например, $(3,0,1)$ и $(0,3,1)$ — два различных 3-разбиения числа 4. Подсчитайте количество n-разбиений числа k, удовлетворяющих ограничениям

$$a_i\geqslant s_i,\quad i=1,\ldots,n;\qquad\qquad s_1+s_2+\ldots+s_n=:s\leqslant k.$$

7. [1] Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра является целым числом от 1 до 10? Сколько можно построить треугольных пирамид, у которых все углы при одной из вершин прямые и длина каждого из рёбер при этой вершине является целым числом от 1 до 10? Многогранники считаются различными, если их нельзя совместить с помощью параллельного переноса или поворота.

8. [2] Сколькими способами можно выбрать два подмножества, A и B, n-элементного множества так, чтобы их пересечение было непусто?

9. [2] Пусть $\widehat{S}(n,k)$ — число *сюръективных отображений*, то есть число функций f из n-элементного множества X в k-элементное множество Y, таких что $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$. Найдите явные формулы для $\widehat{S}(n,3)$ и $\widehat{S}(n,n-2)$.

10. [2] [Это задание было дано в конце практики, но, возможно, с ошибкой!] Докажите комбинаторно следующую формулу:

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{S}(n-i,k-1) \cdot k^i.$$

11. [2] Докажите комбинаторно следующую формулу:

$$\widehat{S}(n,k) = k \cdot \widehat{S}(n-1,k) + k \cdot \widehat{S}(n-1,k-1).$$

Эта формула вполне подходит для того, чтобы вычислять значения $\widehat{S}(n,k)$ рекурсивно. Но чтобы вычисление не шло вечно, для каких-то значений аргументов нужно сразу знать ответ и не применять рекуррентную формулу. Определите начальные условия: чему равно $\widehat{S}(n,0)$, $\widehat{S}(n,n)$ и, в частности, $\widehat{S}(0,0)$?