Задание 7 (на 24 октября)

$\boxed{\textbf{PC31.}}$ (**Исправлено!**) Покажите, что любой вывод в исчислении полиномов можно переписать так, чтобы у каждого полинома степень по каждой переменной была бы не более двух и не более одной переменной входило бы в степени 2 и при этом размер доказательство увеличивается в $O(n)$ раз, а степень вывода увеличатся не более, чем в константу раз, где n — число переменных. (Считается, что для начальных полиномов и конечного полинома условие про степень выполняется.)

$\boxed{\textbf{PC32.}}$ Приведите пример поля $\mathcal{F}$ и многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{F}$, что многочлены не имеют общего корня в этом поле, но при этом не существует таких многочленов $h_1, h_2, \ldots, h_k$, что $\sum f_i h_i = 1$.

$\boxed{\textbf{PC33.}}$ (**Исправлено!**) Покажите, что если для невыполнимой формулы ϕ в k-КНФ и натурального числа d выполняется, что $\phi|_{x=0} \vdash_{d-1} 1$ и $\phi|_{x=1} \vdash_d 1$, то $\phi \vdash_{\max\{d,k\}} 1$. (Имеется в виду вывод ограниченной степени в исчислении полиномов.)

Определение. Пусть ϕ — невыполнимая формула в КНФ. Формула $\phi^{\oplus}$ получается из ϕ с помощью такой операции: каждую переменную x заменяем на $x' \oplus x''$, где x', x'' — это новые переменные, после этого приводим получившуюся формулу в КНФ.

$\boxed{\textbf{PC34.}}$ Пусть ϕ — это формула в k-КНФ. Покажите, что $\phi^{\oplus}$ — можно представить в виде формулы в $2k$-КНФ размера $|\phi| 2^{O(k)}$.

$\boxed{\textbf{PC35.}}$ Покажите, что выполняется неравенство $S_T(\phi^{\oplus}) \geq 2^{d(\phi)}$.

$\boxed{\textbf{PC36.}}$ Покажите, что $S_R(\phi^{\oplus}) \geq 2^{\Omega(w_R(\phi))}$.

$\boxed{\textbf{PC18.}}$ (**Исправлено!**) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

$\boxed{\textbf{PC19.}}$ б) Покажите, что если формула ϕ в k-КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S, то за время $n^{O(\log S + k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ.

$\boxed{\textbf{PC21.}}$ Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $Ts_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.

$\boxed{\textbf{PC24.}}$ Пусть S — множество дизъюнктов, возможно пустое. Обозначем через $neg(S)$ множество дизъюнктов, которое определяется рекурсивно: $neg(\emptyset) = \{\Box\}$, $neg(S \cup \{C\}) = \{D \vee \neg a \mid D \in neg(S), a \in C\}$, при этом тривиальные дизъюнкты удаляются, и удаляются дизъюнкты, которые являются надмножеством (ослаблением) других дизъюнктов.

а) Проверьте, что ширина любого дизъюнкта из $neg(S)$ не превосходит $|S|$.

б) Проверьте, что для непустого S множество $neg(S)$ в точности состоит из минимальных по включению нетривиальных дизъюнктов, что из их отрицания семантически следует конъюнкция дизъюнктов из S.

в) Покажите, что набор значений переменных выполняет все дизъюнкты множества S тогда и только тогда, когда он опровергает хотя бы один дизъюнкт из $neg(S)$.

г) Покажите, что если из конъюнкции множества дизъюнктов S семантически следует конъюнкция множества дизъюнктов S', то для каждого дизъюнкта $C \in neg(S)$ существует такой дизъюнкт $C' \in neg(S')$, что C есть ослабление C'.

д) (**Исправлено!**) Пусть $S_0, S_1, \ldots, S_t$ — это реализация резолюционного доказательства для невыполнимой формулы ϕ в k-КНФ, использующая память (clause space) s. Покажите, что $neg(S_t), neg(S_{t-1}), \ldots, neg(S_0)$ можно дополнить до резолюционного доказательства формулы ϕ ширины не более $s + k - 3$.

Определение. Игра с фишками на графе. Пусть G — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число $peb(G)$ — это наименьшее такое число k, что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что k в любой момент времени использовано не более k фишек).

$\boxed{\textbf{PC29.}}$ Пусть G — это ориентированный граф квадратика $n \times n$, в котором вершины — это узлы сетки, а ребра направлены вправо и вверх. Покажите, что $peb(G) = \Omega(n)$.

$\boxed{\textbf{PC30.}}$ (**Исправлено!**) Пусть $G(V,E)$ — ориентированный граф без циклов. Для кажой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу Peb_G: для каждой вершины v в которую ведут ребра в вершин $u_1, u_2, \ldots, u_k$, где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $v \vee \neg u_1\ lor \neg u_2 \vee \ldots \neg u_k$ и для всех вершин w исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт $\neg w$. Покажите, что $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$.