Теорема [Bulow-Klemperer]

$$\mathbb{E}_{\vec{v}\sim F^n}[Rev_{opt}(\vec{v})] \le \mathbb{E}_{\vec{v}\sim F^{n+1}}[Rev_{SPA}(\vec{v})]$$

Д-во ① OPT : Myerson's auction для n i.i.d. bidders. $F = F_1 = F_2 = \ldots = F_n$ - регулярны => Myerson = 2nd price with reserve price r. $r = \phi^{-1}(0)$

② Пусть $\mathcal{X}_n$ - все возможные правила аллокации т.ч. item обязательно кому-то достаётся. Какой формат аукциона оптимален для $\mathcal{X}_n$?

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\Big] = \mathbb{E}_{\vec{v}\sim F^n}\Big[\sum_{i=1}^{n} \phi(v_i)\cdot x_i(v_i)\Big]$$

Чтобы max $\sum_{i=1}^{n} \phi(v_i)x_i(v_i)$ для $\vec{x}(\vec{v}) \in \mathcal{X}_n$ мы даём item агенту i с макс. $\phi(v_i)$ => даём item i с макс v_i. => опт. для $\mathcal{X}_n$ это 2nd price auction

③ Рассмотрим следующий аукцион $A \in \mathcal{X}_{n+1}$:

- Myerson auction для первых n агентов
- В случае, когда мы не продали товар, отдаём его за бесплатно n+1-ому агенту

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_{\vec{v}\sim F^{n+1}}[Rev_A(\vec{v})] & \le & \mathbb{E}_{\vec{v}\sim F^{n+1}}[Rev_{SPA}(\vec{v})] \\ \| & \uparrow & \\ \mathbb{E}_{\vec{v}\sim F^{n}}[Rev_{OPT}(\vec{v})] & & \end{array}$$

SPA - opt. rev in $\mathcal{X}_{n+1}$

■

Многомерные Аукционы

Например продаём items A и B.

$v(A) > v(B)$ или $v(B) < v(A)$ - не известно аукциону

Модель

- n агентов (макс. свою выгоду)
- конечное множество исходов Ω
- $\forall$ агент i : private valuation функция

$v_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad v_i(\omega) \in \mathbb{R}$ для $\forall\, \omega \in \Omega$

Тип агента $\left(v_i(\omega_1), \ldots, v_i(\omega_{|\Omega|}) \right)$ - вектор в $\mathbb{R}^{|\Omega|}$

Пример1 Аукцион с 1 товаром

$\Omega = \{$ никто не получает, 1-ый агент получает item, 2-ой, ..., n-ый $\}$

$$v_i(\omega_0) = v_i(\omega_1) = \ldots = v_i(\omega_{i-1}) = v_i(\omega_{i+1}) = \ldots = v_i(\omega_n) = 0$$

$$v_i(\omega_i) = ?$$

Пример2 Аукцион с 1 товаром: ядерное оружие.

$$\text{Social Welfare} = \sum_{i=1}^{n} v_i(\omega) \quad \text{для исхода } \omega \in \Omega$$

$$\text{Bids: } \quad \vec{b}_i = \left(b_i(\omega_1), \ldots, b_i(\omega_{|\Omega|}) \right) \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$$

$$\vec{b} = \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \right)$$

Теорема [Vickrey - Clarke - Groves] Для любой многомерной модели $\exists$ DSIC ($\Leftrightarrow$ говорить честно свой тип - доминирующая стратегия) который максимизирует Social Welfare.

Док-во ① Предположим что bids правдивы

$\vec{b}=(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)$. $w^*=x^*(\vec{b})=\arg\max_{w\in\Omega}\sum_{i=1}^{n} b_i(w)$

② Лемма Myersona не работает.

Идея Будем брать с i-ого агента "externality" которое i накладывает на остальных (как если бы i вообще бы не было)

$$p_i(\vec{b})=\max_{w\in\Omega}\sum_{j\neq i} b_j(w)-\sum_{j\neq i} b_j(w^*) \qquad w^*=\arg\max_{w\in\Omega}\sum_{j=1}^{n} b_j(w)$$

OPT. SW без i

SW([n]-i)

$SW([n])-v_i(w^*)$

Утв $(w^*,\vec{p})$ - DSIC

Док-во Нужно проверить: $u_i(\overset{\text{реальный тип}}{\vec{v}_i},\vec{b}_{-i},\overset{\text{то что } i \text{ говорит}}{\vec{v}_i'})\leq$

$\leq u_i(\vec{v}_i,\vec{b}_{-i},\vec{v}_i)$ $\qquad w'\leftarrow(\vec{b}_{-i},\vec{v}_i')$

Фиксируем $i,\vec{b}_{-i}$

$$u(\vec{v},\vec{v}')=v(w')-p_i(\vec{v}_i')=v_i(w')+\sum_{j\neq i} b_j(w')-\max_{w\in\Omega}\sum_{j\neq i} b_j(w)=$$

$$=SW(w')-\max_{w}\sum_{j\neq i} b_j(w)$$

такая же цель как и у продавца

– не зависит от bid i

$$u_i(\vec{v}_i,\vec{v}_i)=SW(w^*)-\max_{w}\sum_{j\neq i} b_j(w)$$ ☒

Утв2 $b_i(w^*) \ge p_i(w^*)$ - индивидуальная рациональность

т.е. если $v_i(w) \ge 0 \ \forall w$

Д-во $u_i(\vec{v_i}, \vec{v_i}) = SW(w^*) - \max\limits_{w} \sum\limits_{j \ne i} b_j(w)$

≥ 0

Зам Если i не влияет на результат, то $p_i = 0$

Пример 1 1-item 3 bidders

$$\text{bidders} \quad \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & \emptyset \\ \hline A & v_A & v_A/3 & 0 & 0 \\ B & v_B/3 & v_B & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & v_C & 0 \end{array}$$

кто получит

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & \emptyset \\ \hline A & 6 & 2 & 0 & 0 \\ B & 7/3 & 7 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

$\uparrow_{w^*}$

$v_A = 6$

$v_B = 7$

$v_C = 8$

$SW = 2 + 7 = 9$

$p_A = -7 + 8 = 1$

$p_B = -2 + 8 = 6$

$p_C = -7 - 2 + 9 = 0$

Пример 2 Комбинаторные аукционы

Модель

- n покупателей, m товаров
- агент i: $v_i(S) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall S \subseteq [m]$
- $X \in \Omega$ – пространство allocations

$\Omega = \{(X_1, \dots, X_n) : X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n \subseteq [m]\}$

$|\Omega| = (n+1)^m$

- $SW(X) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i)$

items A и B, 3 bidders

	A	B	AB	∅
1	1	0	1	0
2	1	1	1	0
3	$2/3$	$1/3$	1.5	0

VCG: $1 \leftarrow A$

$2 \leftarrow B$

$SW = 1 + 1 = 2$

$p_1 = -1 + SW(2,3)$

$= -1 + \frac{2}{3} + 1 = 2/3$

$p_2 = -1 + SW(1,3) = -1 + \frac{3}{2} = 1/2$

$p_3 = -1 - 1 + SW(1,2) = -2 + 2 = 0$

Интересные классы valuation functions

1) аддитивные: $v_i(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}$

2) unit-demand

$$v_i(S) = \max_{j \in S} v_{ij}$$

3) Submodular

$$\forall S,T \subseteq [m] \quad v_i(S) + v_i(T) \geq v_i(S \cup T) + v_i(S \cap T)$$

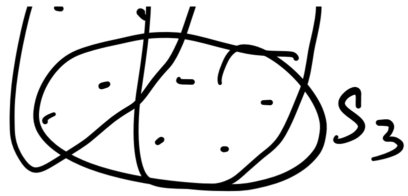
$$\Updownarrow$$

$$m_i(S,j) = v_i(S \cup j) - v_i(S)$$

$$v_i(S) \leq v_i(T) \qquad S \subseteq T$$

$$m_i(S,j) \geq m_i(T,j) \qquad S \subseteq T$$

$v(\{1,3\}) = |S_1 \cup S_3|$



4) Subadditive

$$v(S \cup T) \le v(S) + v(T)$$