Домашнее задание 2

$\boxed{\mathbf{10.}}$ (2) Покажите, что существует такое распределение D на $\{0,1\}^n$, которое является $(t, t2^{-t})$-независимым для которого существует такой вероятностный алгоритм A, который получает оракульный доступ к входу длины n и может во время своей работы адаптивно запросить t битов входа, что $|\Pr_{x\leftarrow D}[A(x)=1] - \Pr_{x\leftarrow U_n}[A(x)=1]| \geq \frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{11.}}$ (3) Пусть S — это множество n-битных, в которых число единиц делится на 3. Докажите, что равномерное распределение на S является ϵ-смещенным при $\epsilon = 2^{-\Omega(n)}$.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ (2) Пусть $G : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$ задает ϵ-смещенное распределение на $\{0,1\}^n$ (имеется в виду, что $maxbias(G(U_k)) \leq \epsilon$) при $\epsilon < 1$. а) Пусть каждый бит выхода G задается многочленом над $\mathbb{F}_2$ степени не больше d от k входов. Докажите, что $n \leq \sum_{i=1}^{d} C_k^d$. б) Покажите, что $n < 2^k$; в) Покажите, что если $n > k$, то G не может быть линейным.

$\boxed{\mathbf{13.}}$ Вычислите коэффициенты Фурье у следующих функций: а) $f : \{-1,1\}^3 \to \{-1,1\}$, $f(x,y,z) = \max(x,y,z)$; б) $f : \{-1,1\}^3 \to \{-1,1\}$, $f(x,y,z) = \min(x,y,z)$; в) $Equ_n : \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$, при этом $Equ_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

$\boxed{\mathbf{14.}}$ (2) а) Сколько булевых функций $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ имеют ровно один ненулевой коэффициент Фурье? б) Покажите, что булевая функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ имеет не больше одного коэффициента Фурье по модулю большего $\frac{1}{2}$. в) Докажите, что не существует функции $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, у которой ровно 2 ненулевых коэффициента Фурье.

$\boxed{\mathbf{15.}}$ (2) Функция $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ называется нечетной, если для любого $x \in \{-1,1\}^n$ выполняется $f(-x) = -f(x)$. Докажите, что у нечетной функции все коэффициенты Фурье, которые соответствуют множествам четной мощности, нулевые.

Правила сдачи

Баллы в скобочках примерно соответствуют сложности задачи. Можно сдавать любое количество решенных задач, выбирая себе подходящие по сложности. Крайний срок сдачи: воскресенье 12-ое апреля. Решения в рукописном виде можно сдать мне лично 12 апреля или оставить в файлике (надо крупно написать "Д.М. Ицыксону") на вахте ПОМИ РАН, в электронном виде решения можно посылать по адресу dmitrits at pdmi.ras.ru.