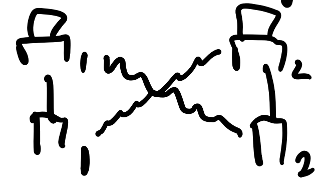
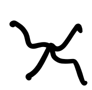
Механизмы без платежей

Стабильные паросочетания (Пример)

↪ ① Обмен почками

(1,1) - не совместимы



 - совместима

↪ ② Приём в вузы

↪ ③ Распределение выпускников мед. вузов на практику (residency) по госпиталям

↪ ④ Распределение учеников по школам.

Модель

1) L, R - доли двудольного графа
   Men Women

2) $\forall\, u \in L \cup R$ имеет предпочтения для другой доли: $m \in$ Men Alice > Bella > ... > Zem
   ↑
   Women

A>B>C	①	Ⓐ	1>2>3
A>B>C	②	Ⓑ	2>3>1
A>B>C	③	Ⓒ	3>1>2

Опр Стабильное паросочетание <=> нет блокирующая пара (никто не хочет изменить своим партнёрам в паросочетании)

Опр Блокирующая пара для паросочетания μ: $m \in$ Men, $w \in$ Women если $m - \mu(m)$

$\mu(w) - w$

$m: w > \mu(m)$
$w: m > \mu(w)$

Есть известный алгоритм Gale – Shapley

Кратко: • мужчины предлагают руку и сердце следуя своим спискам от лучших кандидаток до худших

• $\forall$ женщина ожидает предложений и отвергает все кроме самого лучшего

• Мужчины после того как их отвергли переходят к следующей по списку кандидатке.

Обычно не упоминают в курсе алгоритмов –

Men-proposing alg $\to \mu^*$
– для $\forall$ $m \in M$ получает лучшую из всех возможных женщин по всем стабильным паросочетаниям.

$\mathcal{M}$ – мн-во всех стабильных паросочетаний

$\forall m \in M \quad m - \mu^*(m) \quad \mu^*(m) = h(m) \stackrel{def}{=} \underset{\mu \in \mathcal{M}}{\arg\max} \{\mu(m)\}$

Следствие Men-proposing alg. DSIC для мужчин

Более того, Men-proposing alg. group-strategyproof

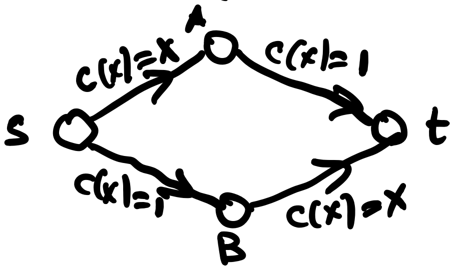
Лекция 8 Цена Анархии.

Вопрос Когда у игры есть равновесия (Нэша) близкие к оптимальному результату?

Мы будем рассматривать PNE (чистые равновесия Нэша)

Применение Игры трафика

Модель 1-юнит трафика в сети от s до t (исток s, сток t)
(поток из $s \to t$)



Рёбра в сети $G=(V,E)$ - гр. граф имеют ценовые функции $c_e(x)$.

p-path $\quad cost(p) = \sum_{e \in p} c_e(x_e)$.

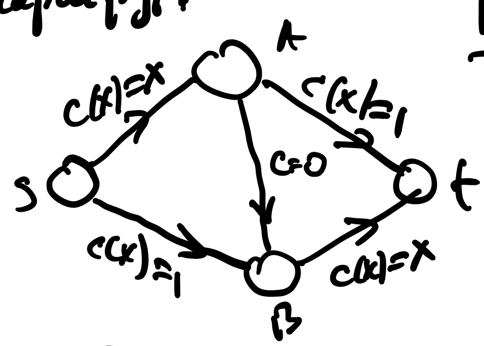
Оптимум 50% - верх
50% - снизу

$cost(\text{верхний путь}) = c_{s\to A}(0.5) + c_{A\to t}(0.5) = 0.5+1 = 3/2$

$cost(\text{нижний путь}) = 3/2$

$\text{Social cost} = \int_0^1 3/2\, dx = 3/2$

Равновесия: $\forall\, \varepsilon > 0$ от трафика - не хочет изменять маршрут.



Парадокс Браеса (БП)

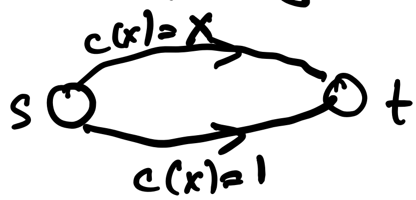
$\exists!$ PNE $s \to A \to B \to t = p$

$cost(p) = 1+0+1 = 2$

social cost $= 2$.

Опр [Цена анархии] $\dfrac{\text{Eq. social cost}}{\text{OPT. social cost}} = 4/3$

Пример 2

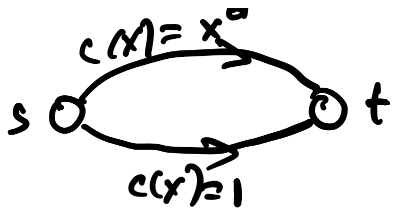


Pigou's пример
OPT: 50% - сверху
50% - снизу

$cost = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = 3/4$.

Равновесие:
100% сверху $\quad cost = 1\cdot 1 = 1 \qquad PoA = 4/3$

Пример 3



d - большое

Равновесие: 100% сверху

$cost = 1 \cdot 1 = 1$

оптимум: $\underset{\text{сверху}}{cost(1-x)} = (1-x)\cdot(1-x)^d + x\cdot 1 = x + (1-x)^{d+1}$

Если $x = \varepsilon \to 0$, $d >> 1/\varepsilon$ то $cost(opt) \to 0$

Формальная модель r-units потока из $s \to t$

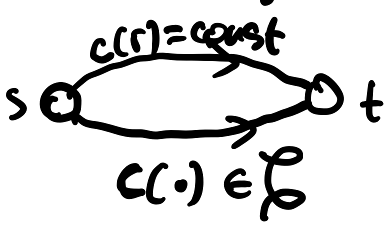
ор. граф $G=(V,E)$

$\forall e \quad c_e(x): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

- не отрицательна
- не убывающая
- непрерывная

} класс функций $\mathcal{C}_0$

Основной результат Среди всех сетей с ценовыми функциями в классе $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0$, наибольшая PoA (Price of Anarchy) достигается на примерах типа Pigou



r-units трафика

Варианты для $\mathcal{C}$:

Линейная $ax+b$ $(a,b \geq 0)$	ax^2+bx+c $(a,b,c\geq 0)$		$ax^d + \ldots$
$4/3$	≈ 1.6	....	$\sim \frac{d}{\ln d}$

$$\Rightarrow PoA = \frac{r \cdot c(r)}{\min\limits_{0 \leq x \leq r} \{x \cdot c(x) + (r-x)c(r)\}}$$

$$\alpha(\mathcal{C}) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \sup_{r \geq 0} \sup_{r \geq x \geq 0} \frac{r \cdot c(r)}{x \cdot c(x) + (r-x)c(r)}$$

Док-во (основной результат)

Поток не отрицательный вектор (f_p) на мн-ве всех путей из $s-t$ $\mathcal{P}$.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} f_p = r$$

Опр 1 Поток через ребро e: $f_e = \sum_{p \in P:\, e \in p} f_p$

Опр 2 $cost(p,f) = \sum_{e \in p} c_e(f_e)$

Опр 3 Поток f в равновесии $\Leftrightarrow$ $\forall \hat{p} \in P$ если $f_{\hat{p}} > 0$, то

$$\hat{p} \in \arg\min_{p \in P} cost(p,f) = \arg\min_{p} \sum_{e \in p} c_e(f_e)$$

Факт [пока без док-ва] $\exists \geq 1$ чистое равновесие Нэша

Опр 4 Social cost $= cost(f) = \sum_{p \in P} f_p \cdot cost(p,f) \overset{*}{=}$

$$\overset{*}{=} \sum_{e \in E} f_e \cdot c_e(f_e)$$

Док-во $\sum_{p \in P} f_p \cdot \sum_{e \in p} c_e(f_e)$

Пусть f – равновесный поток, f^* – опт.

I Представим, что $\bar{c}_e(x) = const = c_e(f_e)$

Как оптимум для $(G, \{\bar{c}_e(\cdot)\}_{e \in E})$?

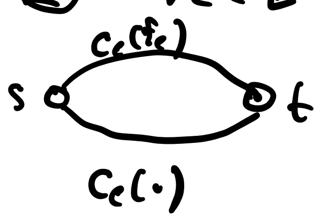
$$cost_{\bar{c}}(f) = \sum_{\hat{p} \in P} f_{\hat{p}} \cdot \underbrace{cost(\hat{p},f)}_{=\min_p cost(p,f) \text{ если } f_{\hat{p}}>0} = r \cdot L$$

$$\wedge|$$

$$cost_{\bar{c}}(f^*) = \sum_{p \in P} f^*_p \cdot \underbrace{cost(p,f)}_{\geq L} \geq r \cdot L$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \sum_{e \in E} (f_e^* - f_e) \cdot c_e(f_e)} \quad \text{I}$$

II $\forall e \in E$ рассмотрим пример типа Pigou



$r = f_e$

Случай 1 $f_e \geq f_e^*$ I

$$\boxed{\alpha(G) \geq \frac{f_e \cdot c_e(f_e)}{f_e^* \cdot c_e(f_e^*) + (f_e - f_e^*)\, c_e(f_e)}}$$

случай 2 $f_e^* > f_e \Rightarrow \alpha(\mathcal{C}) \ge 1 \ge \frac{c_e(f_e)}{c_e(f_e^*)} \ge \frac{f_e \cdot c_e(f_e)}{f_e^* \cdot c_e(f_e^*) - (f_e^* - f_e) \cdot c_e(f_e)}$

III Просуммируем II по всем e

$$\sum_e f_e^* \cdot c_e(f_e^*) \ge \frac{1}{\alpha(\mathcal{C})} \sum_e f_e \cdot c_e(f_e) - \underbrace{\sum_e (f_e - f_e^*) c_e(f_e)}_{\le 0 \text{ по I}} \ge$$

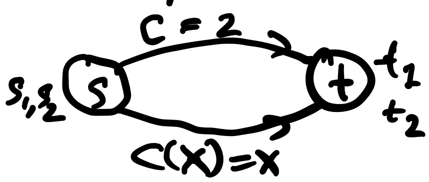
$$\ge \frac{1}{\alpha(\mathcal{C})} \sum_e f_e \cdot c_e(f_e)$$ ■

Атомарные игры трафика

Модель: n игроков

- ∀ игрок имеет: $\overset{\text{исток}}{s_i}$ и $\overset{\text{сток}}{t_i}$
- ∀ игрок выбирает маршрут в сети из s_i в t_i: path p, поток размера 1
- ∀ игрок минимизирует свой $cost(p_i, f)$ выбирая путь p_i

Пример



OPT: 1 сверху, 1 снизу

cost = 2 + 1 = 3

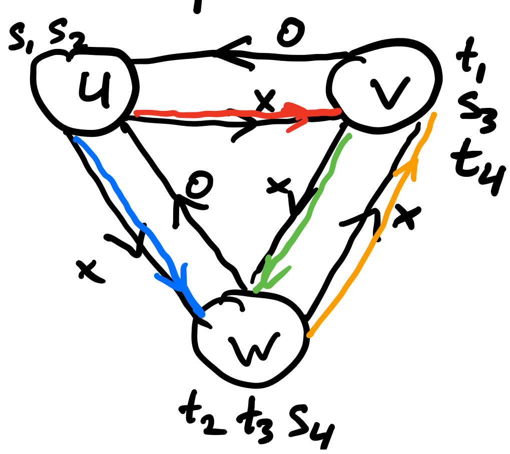
Равновесие: оба снизу I

cost = 2·2 = 4

{1 снизу, 1 сверху} II

PoA = 4/3

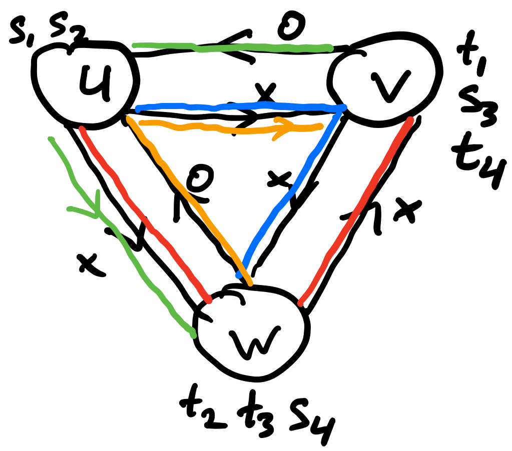
Пример



∀ игрок может поехать напрямую или с 1 остановкой

OPT: все едут прямо.

social cost = 1+1+1+1 = 4



Равновесие: например когда все выбирают маршрут с остановкой

$cost_1(u \to w \to v) = 2+1 = 3$

$cost_2(u \to v \to w) = 3$

$cost_3(v \to u \to w) = 2$

$cost_4(w \to u \to v) = 2$

social cost $= 10 \Rightarrow PoA = 2.5$

Теорема $\forall$ атомарная игра для трафика с линейными ценовыми функциями имеет $PoA \le 2.5$

Док-во Похоже на неатомарные игры.

Зам Тоже док-во работает если
(1) E - м.б. произвольным множеством
стратегии произвольные подмножества E

Лекция 9 Игры с потенциалом + другие понятия равновесия

Теорема [Rosental 73] $\forall$ атомарная игра трафика с $\forall$ ценовыми функциями имеет ≥ 1 PNE.

Док-во Идея: покажем что у игры есть потенциальная функция.

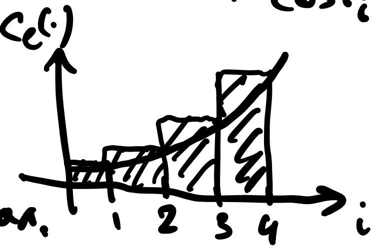
$\Phi(f)$, которая будет убывать при $\forall$ ходе (i игрок меняет путь с $P_i \to \hat{P}_i$) $f \to \hat{f} = \sum_{j \ne i} P_j + \hat{P}_i$ улучшающий его положение i-ого игрока

$$\Phi(\hat{f}) < \Phi(f)$$

Опр [Точный потенциал] $\vec{s}=(s_1,\dots,s_n)$ — вектор стратегий.

$s_i \to s_i'$: $\Phi((\vec{s}_{-i}, s_i)) - \Phi((\vec{s}_{-i}, s_i')) = cost_i(\vec{s}_{-i}, s_i) - cost_i(\vec{s}_{-i}, s_i')$

$$\Phi(f) \overset{def}{=} \sum_{e\in E}\sum_{i=1}^{f_e} c_e(i)$$



Утв $\Phi(f)$ — точный потенциал.

Док-во $\hat f: p_i \to \hat p_i$ если $e \in p_i \cap \hat p_i$ или $\begin{cases} e\notin p_i \\ e\notin \hat p_i\end{cases}$ то $\hat f_e = f_e$

если $e\in \hat p_i \setminus p_i$, то $\hat f_e = f_e+1$

если $e \in p_i\setminus \hat p_i$, то $\hat f_e = f_e - 1$

$\Phi(f)-\Phi(\hat f) = cost(p_i,f) - cost(\hat p_i,\hat f)$ ■

Наблюдения: • улучшение i-ого игрока $\Delta_i(f\to\hat f) = cost(p_i,f) - cost(\hat p_i,\hat f) = \Phi(f)-\Phi(\hat f)$ = улучшению потенциала

• $\min_f \Phi(f)$ — никто не может улучшить cost ⇒ PNE

• ∀ последовательность ходов (индив. изменений путей) улучшающих cost соответствующего игрока приводить к лок. минимуму Φ. ⇒ PNE

Зам ① $c_e(x)$ — м.б. не возрастающая функция (любая)

② Работает для ∀ мн-ва ресурсов E и стратегий: подмн-ва E

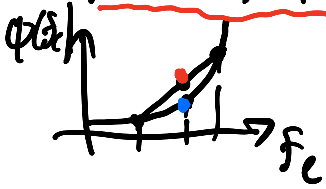
③ не атомарные игры: $\Phi(f)=\sum_{e\in E}\int_0^{f_e} c_e(x)dx$

Утв ∃ PNE для не атомарных игр

Д-во $f\in\mathbb{R}_+^{|E|}$ $f_e\in[0,r]$ ⇒ мн-во допустимых потоков ограничено + замкнуто ⇒ компактное мн-во

Зам Если $c_e(x)\nearrow$, то $\Phi(f)$ – выпуклая функция

$$\lambda\cdot\Phi(f) + (1-\lambda)\Phi(\hat{f}) \ge \Phi(\lambda f + (1-\lambda)\hat{f})$$



Следствие $\exists!$ PNE

Иерархия понятий равновесия

PNE – может не $\exists$, MNE – всегда $\exists$, но часто сложно посчитать (PPAD-hard)

Congestion games (игры трафика): PLS-complete

PDC (Равновесие в доминантных стратегиях) – редко $\exists$, но легко найти

Correlated Equilibrium (CE)

Пример Перекрёсток.

B \ A	ждать	ехать
ждать	A: 0, B: 0	A: 1, B: 0
ехать	A: 0, B: 1	A: -10, B: -10

2 PNE:
(ехать, ждать)
(ждать, ехать)

В жизни: coordination device (светофор)

Def [Corr. Равновесие] σ – распределение $A_1\times\dots\times A_n$ – действий всех n игроков (не обязательно независимо)

σ – Corr. равновесие $\Leftrightarrow \forall i\ \forall s_i^0, \hat{s}_i$

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\vec{s}\sim\sigma}\Big[\underbrace{u_i(\vec{s})}_{-cost_i(\vec{s})} \,\Big|\, s_i=s_i^0\Big] \ge \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{s}\sim\sigma}\Big[u_i(\vec{s}_{-i},\hat{s}_i) \,\Big|\, s_i=s_i^0\Big]$$