

Computer Science Center
Основы дискретной математики
Домашнее задание №4
(до 7 октября)

2 октября 2013 г.

1. [1] Число Стирлинга 1-го рода без знака $c(n, k)$ — это количество перестановок из S_n , имеющих в точности k циклов. Доказать равенство:

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot c(n - 1, k).$$

2. [1] Найдите рекуррентную формулу для перестановок, куб которых — тождественная перестановка.
3. [2] Для каждой перестановки назовём канонической цикловой записью следующую цикловую запись:
- (а) Каждый цикл пишется начиная с элемента, который в этом цикле наибольший
 - (б) Порядок записи циклов таков, что каждый следующий цикл начинается с элемента большего, чем предыдущий

Введём специальное отображение $\Phi : S_n \rightarrow S_n$. Чтобы применить к перестановке Φ , нужно записать эту перестановку в канонической цикловой записи, опустить все скобки и рассмотреть результат как перестановку в «обычной» записи. Например $\Phi((412)(53)) = 41253$.

С использованием доказанного на практике утверждения о том, что Φ — биекция, докажите, что для любого k элемент $i \in [n]$ входит в цикл длины k ровно в $(n - 1)!$ из n -перестановок.

4. [2] Какова вероятность того, что k заданных элементов принадлежат одному циклу в перестановке?
5. [2] Докажите, что в среднем перестановки длины n имеют H_n циклов, где

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

6. [2] Назовём матрицами перестановок матрицы, в которых на каждой строке и в каждом столбце стоит ровно по одной единице, причём все элементы кроме этих единиц — нули. Какое минимальное количество матриц перестановок нужно зафиксировать, чтобы перемножением этих матриц (взятых в любом количестве) можно было получить любую другую матрицу перестановки?