

Задание 5 (на 10.10).

CS 25. Рассмотрим полиэдр $P = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$. Матрица A имеет размер m на n и ее строки линейно независимы. Доказать, что число вершин этого полиэдра не превосходит числа сочетаний из n по m .

CS 26. Докажите, что если полиэдр $P = \{x \mid Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ не пуст, то он имеет вершину тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен n .

CS 27. Докажите, что любая точка выпуклого многогранника в \mathbb{R}^n есть выпуклая комбинация не более, чем $n + 1$ вершины.

CS 28. Пусть задан полиэдр $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Для точки x_0 рассмотрим строки матрицы A , на которых достигается равенство в системе неравенств, задающей полиэдр (назовем получившуюся матрицу B). Докажите, что x_0 является вершиной P тогда и только тогда, когда $x_0 \in P$, $\text{rank}(B) = n$.

Матрица A называется тотально унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы равен одному из трех значений: $-1, 0, 1$.

CS 29. Рассмотрим полиэдр $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, где b — вектор с целочисленными координатами, а матрица A — тотально унимодулярна. Докажите, что все вершины данного полиэдра имеют целочисленные координаты.

CS 30. Пусть дан граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, $x \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. $\sum_{e \in E} x_e \rightarrow \max$, $\forall e \in E \ x_e \geq 0$, $\forall v \in V \ \sum_{e, v \in \delta(e)} x_e \leq 1$, где $\delta(e)$ — множество концов ребра e .

а) Какой “физический” смысл у данной задачи? А если вектор x имеет целочисленные координаты?

б) Докажите, что если граф G двудольный, то оптимум достигается в вершине с целочисленными координатами.

CS 17. Пусть $LINEQ$ — язык выполнимых систем рациональных линейных уравнений. $LINEQ$ состоит из пар (A, b) , где A — матрица $m \times n$, а b — такой рациональный вектор размерности m , что система $Ax = b$ имеет решения. Докажите, что язык $LINEQ$ лежит в классе NP .

CS 20. Хорновской формулой называется формула в КНФ, в которой в каждый дизъюнкт максимум одна переменная входит без отрицания. Покажите, что множество хорновских выполнимых формул содержится в классе P .

CS 24. Докажите, что если существует унарный NP -полный язык, то $P = NP$.