Задание 8 (на 31.10).

$\boxed{\textbf{CS 40.}}$ Пусть функции $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ можно посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти (напомним, что память считается только на рабочих лентах, входная лента доступна только для чтения, а по выходной ленте головка машины Тьюринга движется только слева направо). Докажите, что функцию $f(g(x))$ можно также посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти.
$\boxed{\textbf{CS 41.}}$ Докажите, что задача $2SAT$ лежит в $DSpace[\log^2(n)]$.
$\boxed{\textbf{CS 42.}}$ Определим кванторную пропозициональную формулу: она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_x \ldots Q_nx_n\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где ϕ — пропозициональная формула от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ — кванторы. Переменные x_i принимают значения $\{0,1\}$, истинность формулы определяется естественным образом. Обозначим $TQBF$ — это множество истинных кванторных пропозициональных формул. Докажите, что $TQBF$ лежит в PSpace.
$\boxed{\textbf{CS 43.}}$ Докажите, что язык графов с циклом лежит в классе $DSpace[\log(n)]$.
$\boxed{\textbf{CS 44.}}$ Докажите, что языки из класса $DSpace[1]$ можно распознать за линейное время.

Напомним, деревом решений для функции f назовем бинарное корневое дерево, в котором каждая внутренняя вершина помечена некоторой переменной x_i, а лист значением 0 или 1. Ребра помечены значениями 0 или 1, причем у каждой внутренней вершины один сын помечен ребром 0, а другой 1. Вычисление значения $f(x_1, \ldots, x_n)$ начинается от корня. Проходя внутреннюю вершину, мы спрашиваем значение входной переменной, которая соответствует метке вершины, после чего переходим в соответствующее поддерево. Дойдя до листа мы выдаем значение, которое написано в нем.

Вероятностным деревом решения называется распределение на деревьях решений. Теперь определим вероятностную запросовую сложность.

Стоимость дерева t на входе x ($cost(t, x)$) — число переменных, значение который было опрошено на пути к листу на входе x.

Для функции f обозначим за $\mathcal{P}_f$ множество распределений на множестве деревьев, которые вычисляют функцию f. Вероятностной запросовой сложностью функции f называется величина: $R(f) = \min\limits_{P \in \mathcal{P}_f} \max\limits_{x \in \{0,1\}^n} E_{t \leftarrow P}[cost(t, x)]$.

$\boxed{\textbf{CS 45.}}$ Рассмотрим функцию $f = Maj(x_1, x_2, x_3)$, которая возвращает бит, который чаще встречается на входе. Докажите, что $R(f) \leq \frac{8}{3}$

$\boxed{\textbf{CS 46.}}$ (!Исправлено!) Рассмотрим функцию $f = \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i$. Докажите, что $R(f) = n$.

$\boxed{\textbf{CS 36.}}$ Докажите, что если ρ-gapMAX-q-SAT, где $\rho < 1$ является NP-трудной (т.е. для любого языка из класса NP существует полиномиальное сведение к данной задаче, (элементы языка сводятся к выполнимым формулам, а элементы не из языка сводятся к формулам, для которых можно выполнить не более $(1-\rho)$ клозов)), то существует $\rho' < 1$, что ρ'-gapMAX-3-SAT также является NP-трудной.
$\boxed{\textbf{CS 39.}}$ Докажите, что если $SAT \in \mathrm{PCP}(o(\log(n)), 1)$, то $P = NP$.