

#### Задание 4 (на 03 октября)

**РС16.** (Исправлено!) Покажите, что невыполнимая цейтинская формула для сетки  $k \times n$  имеет дерево решений размера  $n^{O(k)}$ .

**РС17.** Граф  $G_n$  — это сетка  $n \times n$ . Покажите, что  $e(G_n) = \Omega(n)$ . Выведите из этого, что размер любого дерева решений для невыполнимой цейтинской формулы  $Ts_{G_n, f}$  имеет размер не менее  $2^{\Omega(n)}$ .

**РС18.** (Исправлено!) Граф  $G_n$  имеет  $2n$  вершин и строится случайным образом: независимо  $d$  раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе  $d$  с вероятностью  $1 - o(1)$  выполняется  $e(G_n) = \Omega(n)$ .

**РС19.** а) Покажите, что если формула  $\phi$  в  $k$ -КНФ от  $n$  переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера  $S$ , то за время  $n^{O(\log S + k)}$  можно построить резолюционное опровержение формулы  $\phi$ . б) Покажите, что за это же время можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы  $\phi$ .

**РС20.** (Исправлено!) Дана невыполнимая формула  $\phi$  в КНФ. Алиса и Боб играют в такую игру: Алиса поддерживает частичную подстановку переменным формулы  $\phi$  (будем называть эту подстановку состоянием памяти Алисы, например, Алиса может хранить в памяти:  $\{x = 0, y = 1\}$ ). За один свой ход Алиса может выбрать переменную, значения которой еще нет в памяти, и спросить Боба о значении этой переменной. Боб отвечает значение переменной, если его спросили, а Алиса добавляет значение этой переменной в свою память и может удалить значения некоторых переменных из памяти. Игра заканчивается, если состояние памяти Алисы опровергает какой-нибудь дизъюнкт формулы  $\phi$ . Стратегия Алисы — это правило, по которой Алиса делает свой очередной ход, исходя из текущего состояния памяти. Стратегия Алисы называется корректной, если при любом поведении Боба игра рано или поздно заканчивается. Стоимость стратегии Алисы — это число различных состояний памяти Алисы, которые бывают в конце хода при различных поведении Боба. а) Покажите, что минимальная стоимость корректной стратегии Алисы в точности совпадает с  $S_R(\phi)$ . б) Покажите, что если Алиса не может удалять из памяти значение переменной, то минимальная стоимость корректной стратегии Алисы совпадает с  $S_T(\phi)$ .

**РС21.** Пусть  $G_n$  — это сетка  $n \times n$ . Пусть цейтинская формула  $Ts_{G, f}$  невыполнима. Покажите, что  $S_R(Ts_{G, f}) \geq 2^{\Omega(n)}$ .

---

**РС7.** Придумать пример семейства невыполнимых формул  $F_n$  в  $k$ -КНФ размера  $poly(n)$ , что размер любого дерева решений  $F_n$  имеет суперполиномиальный размер (растет быстрее любого полинома), где  $k$  — константа.

**РС9.** Пусть  $\phi$  — невыполнимая формула в КНФ от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Пусть все дизъюнкты формулы  $\phi$  зависят только от  $k$  переменных с последовательными номерами (т.е. от  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}$  для некоторого  $i \in [n - k + 1]$ ). Покажите, что  $\phi$  имеет дерево решений размера  $O(n^k)$ .