Задание 7 (на 24.10).

Напомним: язык $L \in PCP(r(n), q(n))$, если существует система доказательств для языка L, которая использует $O(r(n))$ случайных битов и делает $O(q(n))$ запросов к битам доказательства. Если $x \in L$, то найдется доказательство, которое принимается с вероятностью 1, если $x \notin L$, то любое доказательство принимается с вероятностью меньше $\frac{1}{2}$.

CS 35. Докажите, что $\mathrm{PCP}(0, \log(n)) = \mathrm{P}$.

CS 36. Докажите, что если ρ-gapMAX-q-SAT, где $\rho < 1$ является NP-трудной (т.е. для любого языка из класса NP существует полиномиальное сведение к данной задаче, (элементы языка сводятся к выполнимым формулам, а элементы не из языка сводятся к формулам, для которых можно выполнить не более $(1 - \rho)$ клозов)), то существует $\rho' < 1$, что ρ'-gapMAX-3-SAT также является NP-трудной.

CS 37.

Рассмотрим язык $INDSET$, состоящий из таких пар (G, k), где G — граф, k — натуральное число, что в графе G есть независимое множество вершин размера k (независимым называется такое множество вершин, что между любыми двумя вершинами из данного множества нет ребра). Задача $MAXINDSET$ — задача поиска по графу максимального независимого множества вершин.

Докажите, что:

а) $3SAT$ сводится к задаче $MAXINDSET$ (подсказка: для каждого клоза создать 7 вершин, соответствующих выполняющим наборам).

б) Существует такая константа ρ, что если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, то не существует ρ-приближенного алгоритма для задачи $MAXINDSET$.

CS 38. Докажите, что язык: а) палиндромов над конечным алфавитом; б) $L = \{a^n b^n \min n \in \mathbb{N}\}$ не является регулярным (автоматным).

CS 39. Докажите, что если $SAT \in \mathrm{PCP}(o(\log(n)), 1)$, то $P = NP$.

CS 29. Рассмотрим полиэдр $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, где b — вектор с целочисленными координатами, а матрица A — тотально унимодулярна. Докажите, что все вершины данного полиэдра имеют целочисленные координаты.