

Computer Science Center  
Основы дискретной математики  
Контрольная работа

3 декабря 2013 г.

1. [1] Пусть  $I(n, k)$  есть количество  $n$ -перестановок, имеющих ровно  $k$  инверсий. Докажите, что  $I(n, k) = I(n, C_n^2 - k)$ .
2. [3] Сколько существует  $2m$ -перестановок, состоящих только из циклов чётной длины?
3. [1] Сколько чисел из  $[1000]$  не являются ни точными квадратами, ни точными кубами?
4. [4] Докажите, что  $p(n)$ , число неупорядоченных разбиений на слагаемые, растёт быстрее любого полинома. Не используйте асимптотическую формулу Харди-Рамануджана, которую вы узнали на лекции.
5. [3] Докажите, что ни один связный двудольный регулярный граф не имеет точки сочленения.
6. [4] Имеется колода из  $nm$  карт, по одной карте для каждого значения масти из  $[m]$  и для каждого значения достоинства из  $[n]$ . Карты разложены в таблицу с  $n$  строками и  $m$  столбцами, по одной карте в каждой ячейке. Докажите, что можно найти  $m$  карт, которые имеют разные масти и лежат в разных столбцах.
7. [2] Докажите, что в каждом сильно связном турнире на  $n > 4$  вершинах есть как минимум две вершины, при удалении которых сильная связность не теряется.
8. [2] Вычислите хроматический полином для графа, состоящего из двух циклов длины 4, пересекающихся по единственной вершине.