Задание 10 (на 14 ноября)

$\boxed{\textbf{PC41.}}$ Пусть невыполнимая формула в КНФ $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_k)$ такая, что отношение $Search_\phi$ имеет дэг прямоугольников размера s, в котором все прямоугольники имеют вид $\{(x, y) \mid x_{i_1} = \alpha_1, \ldots, x_{i_l} = \alpha_l, y_{j_1} = \beta_1, \ldots, y_{j_t} = \beta_t\}$, т.е. зафиксированы некоторые координаты. Покажите, что тогда ϕ имеет резолюционное доказательство размера не более s.

$\boxed{\textbf{PC42.}}$ Покажите, что есть опровержение PHP_n^{n+1} в системе CP (секущие плоскости), размер которого ограничен полиномом от n, при этом все коэффициенты в используемых неравенствах не превосходят некоторой константы.

$\boxed{\textbf{PC43.}}$ Покажите, что для любого разбиения переменных формулы PHP_n^{n+1} на две части, отношение $Search_{PHP_n^{n+1}}$ имеет дэг прямоугольников размера $poly(n)$.

$\boxed{\textbf{PC44.}}$ Покажите, что для любого разбиения переменных невыполнимой цейтинской формулы TS_G на две части, отношение $Search_{TS_G}$ имеет дэг прямоугольников размера $poly(n)$.

$\boxed{\textbf{PC45.}}$ Рассмотрим следующую кодировку принципа Дирихле. Есть m кроликов, n клеток и k ключей от клеток. Известно, что $k > m > n$. Каждый ключ открывает некоторое (непустое) множество клеток, каждый кролик получает хотя бы один ключ, никакие два кролика не получают один и тот же ключ, и известно, что если два ключа выданы, то они не открывают одну и ту же клетку. а) Запишите сказанное с помощью формулы $KPHP_n^{m,k}$ в КНФ, используя переменные:

- $p_{i,l}$, которая означает, что кролик i получил ключ l для $i \in [m], l \in [k]$;
- $h_{l,j}$, которая означает, что ключ l открывает клетку j для $l \in [k], j \in [n]$;
- $u_{l,l'}$, которая означает, что ключи l и l' оба на руках для $l, l' \in [k]$;

б) Верно ли, что $KPHP_n^{m,k}$ имеет опровержение в CP размера $poly(k)$?

$\boxed{\textbf{PC18.}}$ (**Исправлено!**) Граф G_n имеет $2n$ вершин и строится случайным образом: независимо d раз мы разбиваем вершины на пары и добавляем ребра между парами (если такое ребро уже есть, то увеличиваем его кратность). Покажите, что при достаточно большой константе d с вероятностью $1 - o(1)$ выполняется $e(G_n) = \Omega(n)$.

$\boxed{\textbf{PC19.}}$ б) Покажите, что если формула ϕ в k-КНФ от n переменных имеет древовидное резолюционное опровержение размера S, то за время $n^{O(\log S + k)}$ можно построить древовидное резолюционное опровержение формулы ϕ.

$\boxed{\textbf{PC21.}}$ Пусть G_n — это сетка $n \times n$. Пусть цейтинская формула $Ts_{G,f}$ невыполнима. Покажите, что $S_R(Ts_{G,f}) \geq 2^{\Omega(n)}$.

Определение. Игра с фишками на графе. Пусть G — ориентированный граф без циклов. За один ход разрешается ставить фишку в любую входную вершину графа, а также в вершину, если фишка уже стоит во всех ее предшественниках, также можно снимать фишку из любой вершины. Число $peb(G)$ — это наименьшее такое число k, что такого количества фишек хватит, чтобы поставить фишку в любой выход графа (имеется в виду, что k в любой момент времени использовано не более k фишек).

$\boxed{\textbf{PC30.}}$ (**Исправлено!**) Пусть $G(V, E)$ — ориентированный граф без циклов. Для кажой вершины заводим пропозициональную переменную и определяем такую формулу Peb_G: для каждой вершины v в которую ведут ребра в вершин $u_1, u_2, \ldots, u_k$, где $k \geq 0$ пишем дизъюнкт $v \vee \neg u_1\ lor \neg u_2 \vee \ldots \neg u_k$ и для всех вершин w исходящей степени 0 добавляем дизъюнкт $\neg w$. Покажите, что $d(Peb_G) \geq peb(G) - 2$.

$\boxed{\textbf{PC39.}}$ Пусть $\phi = \bigwedge_1^m C_i$ — некоторая формула в КНФ, граф которой является (r, c)-граничным экспандером. Пусть подстановка ρ подставляет некоторым переменным из множества I значения, где $|I| \leq cr/2$. Известно, что $\bigwedge_{i \in Cl(I)} C_i|_\rho$ — выполнимая формула. Покажите, что для любого множества $J \subseteq [m]$, если $|J| \leq r/2$, то $\bigwedge_{i \in J} C_i|_\rho$ — выполнимая формула.