Computer Science Center
Основы дискретной математики
Домашнее задание №8
(до 2 декабря)

29 ноября 2013 г.

1. [1] Пусть A есть матрица смежности графа G. Докажите, что элемент $a_{i,j}^k$ k-й степени матрицы A определяет количество маршрутов длины k из вершины i в вершину j.

2. [1] Докажите или опровергните следующее утверждение: объединение двух различных маршрутов, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

3. [1] Докажите, что в связном графе любые два длиннейших простых пути имеют общую вершину.

4. [1] Рассмотрим квадратную сетку, состоящую из $5 \cdot 5 = 25$ вершин, соединенных между собой сорока ребрами. Можно ли покрыть эту сетку пятью ломаными длины 8? А восемью ломаными длины 5?

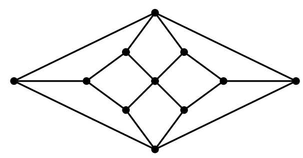

Рис. 1

5. [1] Докажите, что в графе, изображенном на рис. 1, гамильтонова цикла не существует.

6. [1] Рассмотрим простой регулярный граф G, степень каждой вершины которого равна четырем. Докажите, что ребра этого графа всегда можно покрасить в два цвета (красный и синий) так, чтобы любая вершина была инцидентна ровно двум синим и ровно двум красным ребрам.

7. [3] Докажите, что для любого простого графа G на n вершинах выполнено следующее неравенство:
$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1.$$

8. [2] Пусть $\omega(G)$ — кликовое число графа G, то есть количество вершин в его максимальном полном подграфе. Рассмотрим n замкнутых интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_n$ на вещественной оси (рис. 2). Построим для этих интервалов граф на n вершинах $x_1, \ldots, x_n$, соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда $I_i \cap I_j \neq \varnothing$. Такой граф

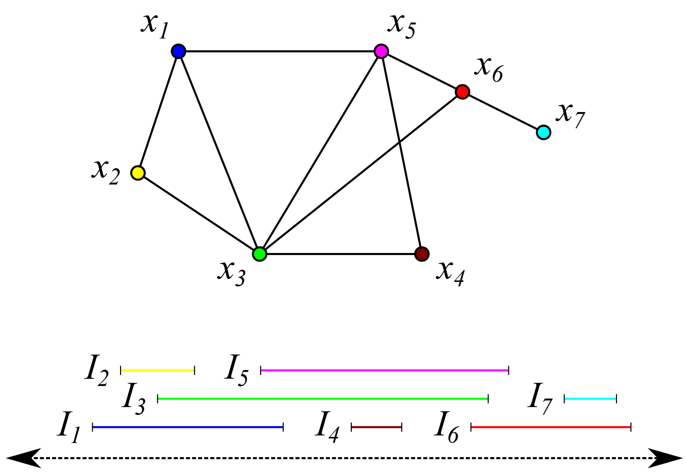

Рис. 2: Интервальный граф

называется *интервальным* графом. Докажите, что каждый интервальный граф является совершенным (для любого подмножества вершин интервального графа, подграф H, индуцированный этим множеством вершин, обладает свойством $\chi(H) = \omega(H)$).

9. [2] Докажите, что хроматический полином простого цикла C_n длины n можно вычислить по формуле
$$P_{C_n}(z) = (-1)^n(z-1) + (z-1)^n.$$

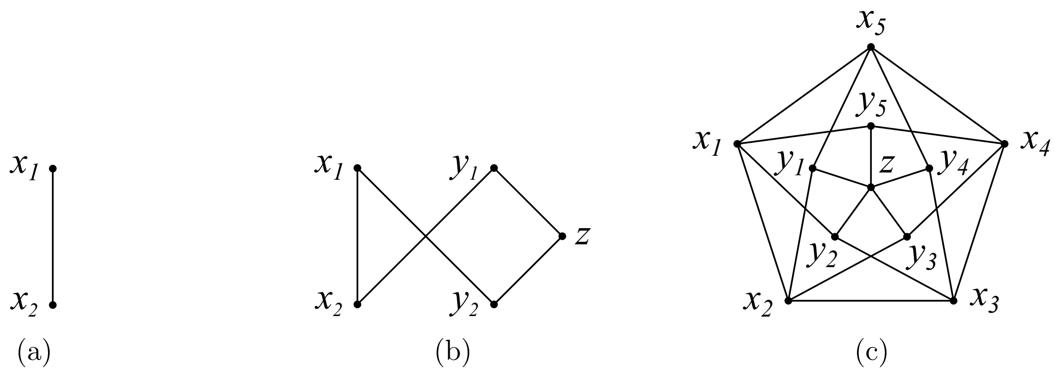

Рис. 3: Графы без треугольников

10. [3] Пусть $G_0 = K_2$. Чтобы получить граф G_{k+1} из графа G_k применим следующую процедуру:

   – множество вершин графа G_{k+1} составим из вершин $V(G_k) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, вершин $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ и вершины z;
   – для каждого ребра $\{x_i, x_j\} \in E(G_k)$ в граф G_{k+1} добавим два ребра: $\{x_i, x_j\}$ и $\{y_i, x_j\}$;
   – для каждого $i \in [n]$ добавим в граф G_{k+1} ребро $\{z, y_i\}$.

   Графы G_0, G_1 и G_2 показаны на рис. 3. Докажите, что ни один из графов G_i не имеет треугольника в качестве подграфа (то есть $\forall i : \omega(G_i) = 2$). Докажите также, что $\chi(G_{k+1}) = \chi(G_k) + 1$. Из этого будет следовать, что существуют графы со сколь угодно большим хроматическим числом, но без нетривиальных клик.

11. [1] Докажите, что в связном графе, построенном на более чем двух вершинах и имеющем мост $\{x, y\}$, хотя бы одна из вершин x, y является точкой сочленения.

12. [1] Обозначим через $\kappa(G)$ вершинную связность графа G. Найдите наименьший 3-регулярный граф G, для которого $\kappa(G) = 1$.

13. [2] Докажите, что для любого 3-регулярного графа G реберная и вершинная связность совпадают. Можно пользоваться недоказанной теоремой о том, что вершинная связность не больше рёберной.

14. [2] Расставим n вершин на окружности через равные интервалы. Зафиксируем некоторое четное натуральное число $k < n$ и проведём рёбра так, чтобы они соединяли каждую вершину с k ближайшими. Мы получим k-регулярный граф G. Докажите, что $\kappa(G) = k$.

15. [3] Пусть H есть некоторый подграф графа G. *Ручкой* к подграфу H графа G называется простой путь P, концы которого принадлежат H, а все рёбра и внутренние вершины — не принадлежат (рис.4,a).

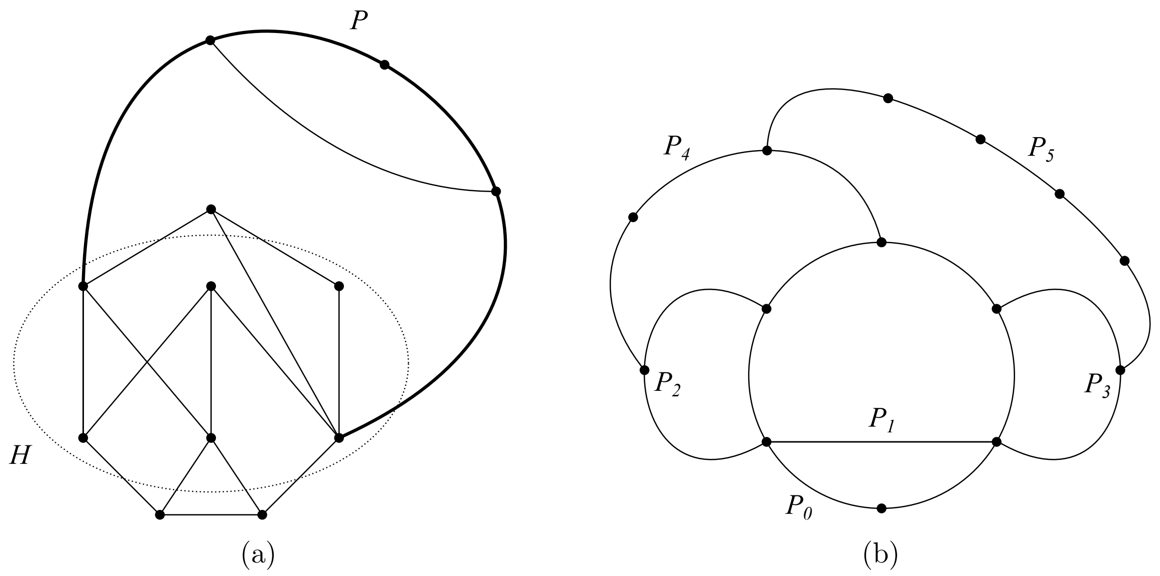

Рис. 4

Разложением графа G на ручки называется такая последовательность $P_0, \ldots, P_k$ подграфов графа G, что

- P_0 — цикл;
- $\forall i \in [k] : P_i$ — ручка к подграфу $G_i = P_0 \cup \ldots \cup P_{i-1}$ графа G;
- $G_k = G$ (рис.4,b).

Докажите, что любой двусвязный (такой, что $\kappa(G) \geqslant 2$) граф G имеет разложение на ручки, начинающееся с произвольного цикла в этом графе.