Домашнее задание 3

$\boxed{\textbf{16.}}$ Пусть собственные числа матрицы смежности графа с n вершинами и m ребрами (в графе нет петель и кратных ребер) равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Вычислите а) (1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; б) (1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$; в) (1) Какой смысл у $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ (2) Докажите, что спектр (собственные числа) матрицы смежности регулярного графа симметричны относительно 0 тогда и только тогда, когда он двудольный.

$\boxed{\textbf{18.}}$ (2) Оцените сверху вероятность того, что при случайном блуждании длины ℓ по (n, d, α)-экспандеру множество B плотности ρ будет посещено как минимум $\beta\ell$ раз.

$\boxed{\textbf{19.}}$ (2) Докажите, что хроматическое число алгебраического (n, d, α)-экспандера больше, чем $\frac{1}{\alpha}$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ (2) G является (n, d, α)-экспандером. Пусть S множество из ρn вершин графа. Докажите, что в подграфе, индуцированном вершинами S не более $\frac{dn}{2}(\rho^2 + \alpha\sqrt{\rho(1-\rho)})$ ребер.

$\boxed{\textbf{21.}}$ (3) Пусть H_n^m — семейство попарно независимых хеш-функций. Пусть $S \subseteq \{0,1\}^n$. Пусть случайная величина H распределена равномерно на H_n^m, а случайная величина X равномерно на S. Докажите, что статистическое расстояние между распределением, задаваемым случайной величиной $(H, H(X))$ и случайной величиной H, U_m не превосходит $\epsilon = (\frac{2^m}{|S|})^{\Omega(1)}$.

$\boxed{\textbf{22.}}$ (2) (Лемма о сглаживании) Пусть G — это (n, d, α)-алгебраический экспандер. X — такая случайная величина со значениями на вершинах G, что для каждой вершины v выпооняется $\Pr[X = v] \le \frac{K}{n}$. Пусть Y — это случайная соседняя с X вершина. Докажите, что $\sum_{v \in V} |\Pr[Y = v] - \frac{1}{n}| < \alpha\sqrt{K-1}$.

$\boxed{\textbf{23.}}$ (2) Пусть $\mathrm{Ext} : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^d \to \{0,1\}^m$ — это (k, ϵ)-экстрактор. Покажите, что алгоритм, который получет случайную строку r длины n и делает 2^d запросов $\{\mathrm{Ext}(r, s) \mid s \in \{0,1\}^d\}$ к функции $f : \{0,1\}^m \to [0,1]$ и выдает среднее арифмитическое полученных ответов, является усредняющим сэмплером с точностью ϵ и ошибкой $\delta = 2^{-(n-k-1)}$.

$\boxed{\textbf{24.}}$ Покажите, что существуют эффективные хиттеры с следующими параметрами: а) (1) $q = \frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\delta}$ и $r = \frac{n}{\epsilon}\log\frac{1}{\delta}$. б) (1) $q = \frac{1}{\epsilon\delta}$ и $r = 2n$; в) (1) $q = O(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\delta})$ и $r = 2n + O(\log\frac{1}{\delta})$. ($\delta$ — это вероятность неудачи, а ϵ — это доля единиц функции f).

Правила сдачи

Баллы в скобочках примерно соответствуют сложности задачи. Можно сдавать любое количество решенных задач, выбирая себе подходящие по сложности. Крайний срок сдачи: воскресенье 17-ое мая. Решения в рукописном виде можно сдать мне лично на экзамене 17 мая, в электронном виде решения можно посылать по адресу dmitrits at pdmi.ras.ru.