Задание 12 (на 28.11).

CS 41. Докажите, что задача $2SAT$ лежит в $DSpace[\log^2(n)]$.

CS 42. Определим кванторную пропозициональную формулу: она имеет вид $Q_1 x_1 Q_2 x_x \dots Q_n x_n \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где ϕ — пропозициональная формула от переменных $x_1, \dots, x_n$, а $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ — кванторы. Переменные x_i принимают значения $\{0, 1\}$, истинность формулы определяется естественным образом. Обозначим $TQBF$ — это множество истинных кванторных пропозициональных формул. Докажите, что $TQBF$ лежит в PSpace.

CS 43. Докажите, что язык графов с циклом лежит в классе $\mathrm{DSpace}[\log(n)]$.

CS 51. Алиса задумывает целое число от 1 до n. Боб должен отгадать это число, задавая Алисе вопросы, требующие ответы да или нет. Алиса может солгать в одном из ответов. Стратегия Боба называется адаптивной, если очередной задаваемый вопрос может зависеть от ответов, данных Алисой на предыдущих шагах. Стратегия называется неадаптивной, если Боб сразу предъявляет список всех своих вопросов, не дожидаясь первых ответов Алисы.

a) Какое минимальное число вопросов Должен задать Боб, чтобы гарантированно узнать задуманное Алисой число для $n = 200$. (для адаптивной стратегии)?

b) Какое минимальное число неадаптивных вопросов должен задать Боб для $n = 150$.

c) Какое минимальное число адаптивных вопросов должен задать Боб для $n = 150$.

CS 53. Добавим к кодовым словам кода Хэмминга бит проверки четности: значение добавленного бита выбирается так, чтобы число единиц в каждом кодовом слове было бы чётно. Понятно, что число кодовых слов при этом не меняется, а их длина увеличивается на 1. Как при этом изменяется кодовое расстояние?

CS 54. Код $C : \{0, 1\}^k \to \{0, 1\}^n$ называется систематическим, если существуют такие числа $j_1, \dots, j_k$, что для любого $(x_1, \dots, x_k) \in \{0, 1\}^k$ в кодовом слове $(y_1, \dots, y_n) = C(x_1, \dots, x_n)$ биты $y_{j_1}, \dots, y_{j_k}$ равны соответствующим битам исходного слова. Другими словами, все "информационные биты" непосредственно входят в кодовое слово.

Докажите, что всякий линейный код $C : \{0, 1\}^k \to \{0, 1\}^n$ можно переделать в систематический линейный код $C' : \{0, 1\}^k \to \{0, 1\}^n$, сохранив прежнее множество кодовых слов (и проверочную матрицу).