Комбинаторные сложностные характеристики бесконечных слов

Анна (Эдуардовна) Фрид

ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
anna.e.frid@gmail.com

Лекция 5, 16.10.2011

Комбинаторная сложность

Определение

Комбинаторной сложностью бесконечного слова w называется функция $p_w(n)$, равная числу его подслов длины n.

Комбинаторная сложность

Определение

Комбинаторной сложностью бесконечного слова w называется функция $p_w(n)$, равная числу его подслов длины n.

Example

В слове Туэ-Морса

$$0110\ 1001\ 1001\ 0110\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001 \cdots$$

не встречаются слова 000 и 111, поэтому $p_{TM}(3) = 6$.

Свойства функции сложности

Напомним, что слово *(со временем) периодическое*, если имеет вид $uvvvvvv\cdots$.

Свойства функции сложности

Напомним, что слово *(со временем) периодическое*, если имеет вид $uvvvvvv\cdots$.

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $1 \leq p_w(n) \leq q^n$;

Свойства функции сложности

Напомним, что слово *(со временем) периодическое*, если имеет вид $uvvvvvv\cdots$.

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $1 \le p_w(n) \le q^n$;
- Функция $p_w(n)$ не убывает;

Свойства функции сложности

Напомним, что слово *(со временем) периодическое*, если имеет вид $uvvvvvv\cdots$.

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $1 \leq p_w(n) \leq q^n$;
- Функция $p_w(n)$ не убывает;
- Функция $p_w(n)$ ограничена тогда и только тогда, когда слово w со временем периодично.

Свойства функции сложности (продолжение)

- Минимальная сложность непериодических слов равна $n+1$ (слова Штурма).

Свойства функции сложности (продолжение)

- Минимальная сложность непериодических слов равна $n+1$ (слова Штурма).
- Сложность автоматных слов растет линейно.

Свойства функции сложности (продолжение)

- Минимальная сложность непериодических слов равна $n+1$ (слова Штурма).
- Сложность автоматных слов растет линейно.
- Сложность неподвижных точек морфизмов растет как $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n \log \log n)$, $O(n)$ или $O(1)$ [Pansiot 1984].

Свойства функции сложности (продолжение)

- Минимальная сложность непериодических слов равна $n+1$ (слова Штурма).
- Сложность автоматных слов растет линейно.
- Сложность неподвижных точек морфизмов растет как $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n \log \log n)$, $O(n)$ или $O(1)$ [Pansiot 1984].
- Сложность морфических слов растет как $O(n^{1+1/k})$ для некоторого k или как $O(n \log n)$ (или медленнее) [Devyatov, 2008: доказательство опубликовано частично].

Свойства функции сложности (продолжение)

- Минимальная сложность непериодических слов равна $n+1$ (слова Штурма).
- Сложность автоматных слов растет линейно.
- Сложность неподвижных точек морфизмов растет как $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n \log \log n)$, $O(n)$ или $O(1)$ [Pansiot 1984].
- Сложность морфических слов растет как $O(n^{1+1/k})$ для некоторого k или как $O(n \log n)$ (или медленнее) [Devyatov, 2008: доказательство опубликовано частично].
- Если сложность слова растет линейно, то ее первые разности ограничены [Cassaigne, 1996].

Метод специальных слов

Рассмотрим *продолжаемый факторный* язык F — например, язык подслов бесконечного слова.

- Продолжаемый: $\forall u \in F \exists a, b \in \Sigma : aub \in F$.
- Факторный: замкнутый относительно взятия подслова.

Метод специальных слов

Рассмотрим *продолжаемый факторный* язык F — например, язык подслов бесконечного слова.

- Продолжаемый: $\forall u \in F \exists a, b \in \Sigma : aub \in F$.
- Факторный: замкнутый относительно взятия подслова.

Обозначим через $l(u)$ ($r(u)$) множество символов, которыми слово u может быть продолжено влево (вправо), и назовем *специальным* влево (вправо) слово, у которого $l(u) \neq 1$ ($r(u) \neq 1$).

Метод специальных слов

Обозначим через $F(n)$ множество всех слов языка F длины n, а через $L(n)$ — множество его специальных слов длины n.

Метод специальных слов

Обозначим через $F(n)$ множество всех слов языка F длины n, а через $L(n)$ — множество его специальных слов длины n.
Тогда первые разности комбинаторной сложности:

$$p'(n) = p(n+1) - p(n) = \sum_{u \in F(n)} (l(u) - 1) = \sum_{u \in L(n)} (l(u) - 1).$$

$$p'(n) = p(n+1) - p(n) = \sum_{u \in F(n)} (r(u) - 1) = \sum_{u \in R(n)} (r(u) - 1).$$

Биспециальные слова

Слово биспециально, если оно специально справа и слева. Множество $B(n)$.

Биспециальные слова

Слово биспециально, если оно специально справа и слева. Множество $B(n)$.

Степень биспециальности:

$$b(v) = \#\{(a, b) | a, b \in \Sigma, avb \in F\} - l(v) - r(v) + 1$$

Биспециальные слова

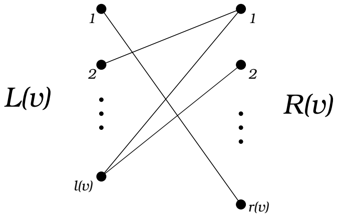
Слово биспециально, если оно специально справа и слева. Множество $B(n)$.

Степень биспециальности:

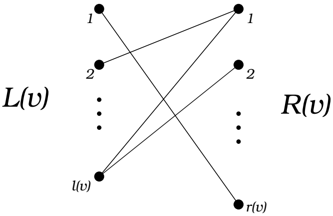
$$b(v) = \#\{(a, b) | a, b \in \Sigma, avb \in F\} - l(v) - r(v) + 1$$

$$p(n+2) - 2p(n+1) + p(n) = p''(n) = \sum_{v \in F(n)} b(v) = \sum_{v \in B(n)} b(v).$$

Граф биспециальности



Граф биспециальности



История: Cassaigne 1994,1997; Августинович 1994 (Туэ-Морс), Августинович-Фрид 1998.

Линейная сложность

Характеризации бесконечных слов с линейной комбинаторной сложностью нет.

S-adic conjecture

Бесконечное слово имеет линейную комбинаторную сложность тогда и только тогда, когда *каким-то образом* задается морфизмами.

Линейная сложность

Характеризации бесконечных слов с линейной комбинаторной сложностью нет.

S-adic conjecture

Бесконечное слово имеет линейную комбинаторную сложность тогда и только тогда, когда *каким-то образом* задается морфизмами.

S. Ferenczi продвинулся дальше всех

Арифметическая сложность

Арифметическим замыканием бесконечного слова $w = w_0 w_1 \cdots w_n \cdots$ называется множество

$$A_w = \{w_k w_{k+d} w_{k+2d} \cdots w_{k+(n-1)d} | k \geq 0, d > 0\}.$$

Арифметическим замыканием бесконечного слова $w = w_0 w_1 \cdots w_n \cdots$ называется множество

$$A_w = \{w_k w_{k+d} w_{k+2d} \cdots w_{k+(n-1)d} | k \geq 0, d > 0\}.$$

Арифметическая сложность $a_w(n)$ определяется как

$$a_w(n) = \#(A_w \cap \Sigma^n).$$

Avgustinovich, Fon-Der-Flaass, Frid 2000 (2003).

Свойства арифметической сложности

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $p_w(n) \leq a_w(n) \leq q^n$;

Свойства арифметической сложности

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $p_w(n) \leq a_w(n) \leq q^n$;
- Функция $a_w(n)$ не убывает;

Свойства арифметической сложности

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $p_w(n) \leq a_w(n) \leq q^n$;
- Функция $a_w(n)$ не убывает;
- Функция $a_w(n)$ ограничена тогда и только тогда, когда слово w со временем периодично.

Для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q

- $p_w(n) \leq a_w(n) \leq q^n$;
- Функция $a_w(n)$ не убывает;
- Функция $a_w(n)$ ограничена тогда и только тогда, когда слово w со временем периодично.

Theorem (Ван-дер-Варден)

$\forall w \, \forall n \, \exists a \in \Sigma \mid a^n \in A_w$.

Естественные вопросы

Какова арифметическая сложность слова Туэ-Морса?

Естественные вопросы

Какова арифметическая сложность слова Туэ-Морса?
Слова дракона?

Естественные вопросы

Какова арифметическая сложность слова Туэ-Морса?
Слова дракона?
Слов Штурма?

Естественные вопросы

Какова арифметическая сложность слова Туэ-Морса?
Слова дракона?
Слов Штурма?
Когда сложность минимальна?

Естественные вопросы

Какова арифметическая сложность слова Туэ-Морса?
Слова дракона?
Слов Штурма?
Когда сложность минимальна?
Когда сложность линейна?

Естественные вопросы

Какова арифметическая сложность слова Туэ-Морса?
Слова дракона?
Слов Штурма?
Когда сложность минимальна?
Когда сложность линейна?
Какой она вообще может быть?

Арифметическая сложность некоторых слов

Theorem (AFF)

Арифметическая сложность слова Туэ-Морса равна 2^n.

Арифметическая сложность некоторых слов

Theorem (AFF)

Арифметическая сложность слова Туэ-Морса равна 2^n.

Доказательство: $a, b \in A_{TM}$ одинаковой длины $\Longrightarrow a \oplus b \in A_{TM}$.

Арифметическая сложность некоторых слов

Theorem (AFF)

Арифметическая сложность слова Туэ-Морса равна 2^n.

Доказательство: $a, b \in A_{TM}$ одинаковой длины $\Longrightarrow a \oplus b \in A_{TM}$.

Theorem (AFF)

Арифметическая сложность слова дракона равна $8n$ *начиная с* $n = 14$.

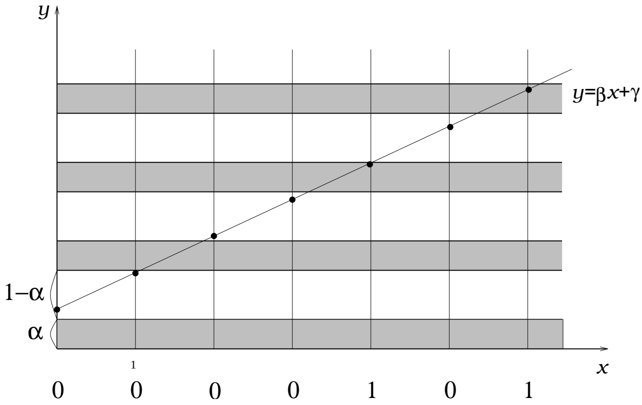
Слово дракона (paperfolding word)

$$w = w_1 w_2 w_3 \cdots \in \{1, -1\}^\omega$$

$$P = 1 \diamond -1 \diamond$$

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
w(0) & = & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\
w(1) & = & 1 & \diamond & -1 & \diamond & 1 & \diamond & -1 & \diamond & 1 & \diamond & -1 & \diamond & 1 & \diamond & -1 \\
w(2) & = & 1 & 1 & -1 & \diamond & 1 & -1 & -1 & \diamond & 1 & 1 & -1 & \diamond & 1 & -1 & -1 \\
w(3) & = & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \diamond & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
w & = & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1
\end{array}$$

Это код кривой дракона: 1 — налево, -1 — направо (или наоборот).



Это из предыдущей лекции: Cassaigne, F., 2007. $O(n^3)$.

Минимальная арифметическая сложность

Avgustinovich, Cassaigne, Frid, 2006: минимальная арифметическая сложность *из равномерно рекуррентных слов* у следующих слов Тёплица:

$$P_{0,k} = \underbrace{0 \cdots 0}_{k} \diamond$$

$$P_{1,k} = \underbrace{1 \cdots 1}_{k} \diamond$$

(Здесь k просто!)
$k = 3$:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} w(0) & = & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ w(1) & = & 0 & 0 & \diamond & 0 & 0 & \diamond & 0 & 0 & \diamond & 0 & \text{-}0 & \diamond & 0 & 0 & \diamond \\ w(1) & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \diamond & 0 & \text{-}0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$w = 001001000\ 001001000\ 001001001\ 001001000 \cdots = P_{0,3} \cdot P_{1,3} \cdot P_{0,3} \cdots .$$

Линейная арифметическая сложность

Theorem (Frid, 2005)

Арифметическая сложность равномерно рекуррентного слова линейна тогда и только тогда, когда его множество подслов такое же, как у слов Теплица, порожденных периодичной (возможно, с предпериодом) последовательностью p-регулярных шаблонов Теплица, где p просто.

p-регулярный шаблон:

$$T = a_1 a_2 \cdots a_{p-1} \diamond a_{p+1} \cdots a_{2p-1} \diamond \cdots a_{(k-1)p+1} \cdots a_{kp-1} \diamond .$$

Промежуточная арифметическая сложность

Theorem (Salimov, 2009)

Существуют бесконечные слова с арифметической сложностью, растущей быстрее, чем любой полином, но медленнее, чем α^n для любого $\alpha > 1$.

Theorem (Salimov, 2009)

Существуют бесконечные слова с арифметической сложностью, растущей быстрее, чем любой полином, но медленнее, чем α^n *для любого* $\alpha > 1$.

Ср. с

Theorem (Cassaigne, 2002)

Существуют бесконечные слова с комбинаторной сложностью, растущей быстрее, чем любой полином, но медленнее, чем α^n *для любого* $\alpha > 1$.

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *k-окно*.

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово*;

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$01001010100101\cdots \qquad\qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово*;

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \cdots \qquad T = (0, 2, 5)$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$0\textcolor{red}{1}0\textcolor{red}{0}10\textcolor{red}{1}0100101\cdots \qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *k-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово*;

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$01\textcolor{red}{0}0\textcolor{red}{1}01\textcolor{red}{0}100101\cdots \qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$010\color{red}{01}\color{red}{0}1\color{red}{0}\color{red}{1}00101\cdots \qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$0100{\color{red}1}0{\color{red}1}0{\color{red}1}{\color{red}0}0101\cdots \qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$010010{\color{red}1}0{\color{red}0}10{\color{red}0}101\cdots \qquad\qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$0100101\textcolor{red}{1}0\textcolor{red}{1}00\textcolor{red}{1}01 \cdots \qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \dots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \dots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$0100101\textcolor{red}{0}1\textcolor{red}{0}01\textcolor{red}{0}1 \cdots \qquad T = (0, 2, 5)$$

Сложность Камаэ

$T = \{0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$: *$k$-окно.*

Для слова $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$:

$u_{n+T} = u_n u_{n+m_1} \cdots u_{n+m_{k-1}}$ — *T-подслово;*

$p_u(T) = \{u_{n+T} | n = 0, 1, \ldots\}$ — T-сложность слова u;

$\max\limits_{|T|=k} p_u(T) = p_u^*(n)$ — *максимальная шаблонная сложность* или *сложность Камаэ* слова u.

[Kamae, Zamboni, 2002]

$$01001010\color{red}{1}0\color{red}{0}10\color{red}{1}\cdots \qquad\qquad T = (0, 2, 5)$$

Низкая сложность Камаэ

Theorem (Kamae, Zamboni, 2002)

Бесконечное слово w не периодично тогда и только тогда, когда $p^*_w(n) \geq 2n$ для всех достаточно больших n.

Низкая сложность Камаэ

Theorem (Kamae, Zamboni, 2002)

Бесконечное слово w не периодично тогда и только тогда, когда $p_w^*(n) \geq 2n$ для всех достаточно больших n.

Слова со сложностью $2n$: все слова Штурма, простые слова Теплица... *и другие*.

Низкая сложность Камаэ

Theorem (Kamae, Zamboni, 2002)

Бесконечное слово w не периодично тогда и только тогда, когда $p_w^*(n) \geq 2n$ для всех достаточно больших n.

Слова со сложностью $2n$: все слова Штурма, простые слова Теплица… *и другие*.

Theorem (KZ 2002)

Сложность Камаэ слова Туэ-Морса равна 2^n.

Низкая сложность Камаэ

Theorem (Kamae, Zamboni, 2002)

Бесконечное слово w не периодично тогда и только тогда, когда $p_w^*(n) \geq 2n$ для всех достаточно больших n.

Слова со сложностью $2n$: все слова Штурма, простые слова Теплица... *и другие*.

Theorem (KZ 2002)

Сложность Камаэ слова Туэ-Морса равна 2^n.

Kamae, Salimov недавно разобрались со сложностью Камаэ неподвижных точек бинарных однородных морфизмов.

Перестановки и слова

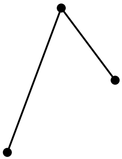
Пусть $a = a_0, a_1, a_2, \ldots$ и $b = b_0, b_1, b_2, \ldots$ две последовательности действительных чисел, и

$$a \sim b : a_i < a_j \iff b_i < b_j$$

(Конечная или бесконечная) *перестановка* — это класс эквивалентност $\alpha = \overline{a} = \overline{b}$.

Последовательности a и b — *представители* перестановки α.

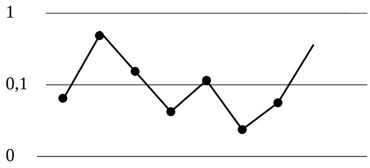
Пример: $\overline{-100, 200, 197} = \overline{90, 100, 98} = \overline{1, 3, 2}$



Можно писать просто $\alpha = 1\ 3\ 2$, но лучше различать перестановки и их представители.

$w_{TM} = 0110100110010110\cdots$ — слово Туэ-Морса

Рассмотрим последовательность a_{TM} сдвигов:
$0,01101001\cdots$,
$0,11010010\cdots$,
$0,10100110\cdots$,
$0,01001100\cdots$,
$0,10011001\cdots$,
$0,00110010\cdots$, и т.д.



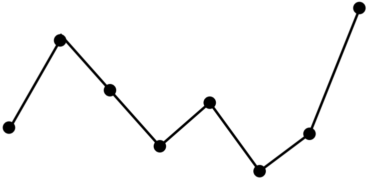
$$\alpha_{TM} = \overline{a_{TM}}$$

Естественно рассматривать перестановки, порожденные *бинарными* словами.

Подперестановки или факторы

По аналогии с подсловами:

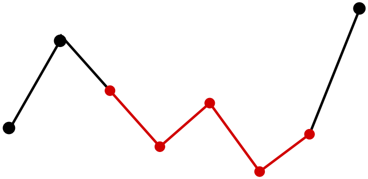
$$011010011001\cdots$$



Подперестановки или факторы

По аналогии с подсловами:

$$01\color{red}{1010}\color{black}{0}11001\cdots$$



Перестановочная сложность

Definition

Перестановочной сложностью $t_w(n)$ *непериодического* бесконечного слова w называется число подперестановок заданной длины n порожденной им бесконечной перестановки.

Свойства перестановочной сложности

Все нижеследующее верно только для бинарных слов!

Свойства перестановочной сложности

Все нижеследующее верно только для бинарных слов!

- $t_w(n) \geq p_w(n-1)$.

Свойства перестановочной сложности

Наибольшая перестановочная сложность бесконечного бинарного слова равна

$$t(n) = \sum_{t=1}^{n-1} \psi(t) \cdot 2^{n-1-t},$$

где $\psi(t) = \sum_{d|t} \mu(t/d) \cdot 2^d$ — число различных *примитивных* слов длины t.

$$t(n+1) = 2^n(n - \alpha + O(n2^{-n/2}); \; \alpha = 1.3827\cdots$$

[Макаров, 2005]

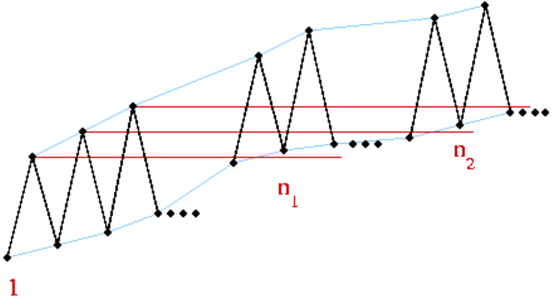
Свойства перестановочной сложности

- Перестановочная сложность слов Штурма равна n, и это минимум для перестановочной сложности слов.
  [Макаров, 2006]

Свойства перестановочной сложности

- Перестановочная сложность слов Штурма равна n, и это минимум для перестановочной сложности слов. [Макаров, 2006]
- Перестановочная сложность слова Туэ-Морса нашел S. Widmer (2011); Валюженич успел обобщить.

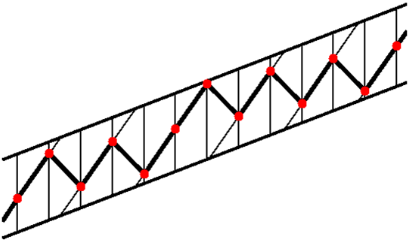
Первый дополнительный слайд с красивой картинкой



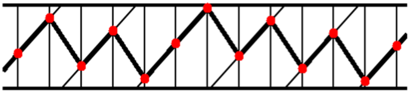
[Fon-Der-Flaass, Frid, 2005]

Второй дополнительный слайд с красивой картинкой

Перестановки Штурма



0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0



Фиксируем $x, y > 0$ и полагаем

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i + x \text{ при } w_i = 0, \\ a_i - y \text{ при } w_i = 1. \end{cases}$$

Частный случай:
$x = \sigma$, $y = 1 - \sigma$

[Макаров, 2006]: это в точности перестановки, порожденные словами Штурма.

Низкая сложность Камаэ

Theorem (Avgustinovich, F., Kamae, Salimov, 2011)

Бесконечная перестановка w непериодична тогда и только тогда, когда $p^*_w(n) \geq n$ для всех достаточно больших n.

Низкая сложность Камаэ

Theorem (Avgustinovich, F., Kamae, Salimov, 2011)

Бесконечная перестановка w непериодична тогда и только тогда, когда $p_w^*(n) \geq n$ для всех достаточно больших n.

Несомненно, это аналог

Theorem (Kamae, Zamboni, 2002)

Бесконечное слово w не периодично тогда и только тогда, когда $p_w^*(n) \geq 2n$ для всех достаточно больших n.

Theorem (Avgustinovich, F., Kamae, Salimov, 2011)

Бесконечная перестановка w непериодична тогда и только тогда, когда $p^*_w(n) \geq n$ для всех достаточно больших n.

Несомненно, это аналог

Theorem (Kamae, Zamboni, 2002)

Бесконечное слово w не периодично тогда и только тогда, когда $p^*_w(n) \geq 2n$ для всех достаточно больших n.

НО! Перестановки со сложностью ровно n — это *в точности* перестановки Штурма.

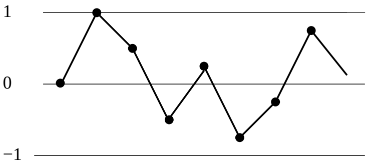
Третий красивый слайд

Определим морфизм $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]^2$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x - 1, & \text{if } x > 0; \\ \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x + 1, & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{5}{8}, \ldots$$

[Makarov, 2009]



Два совсем разных представителя!