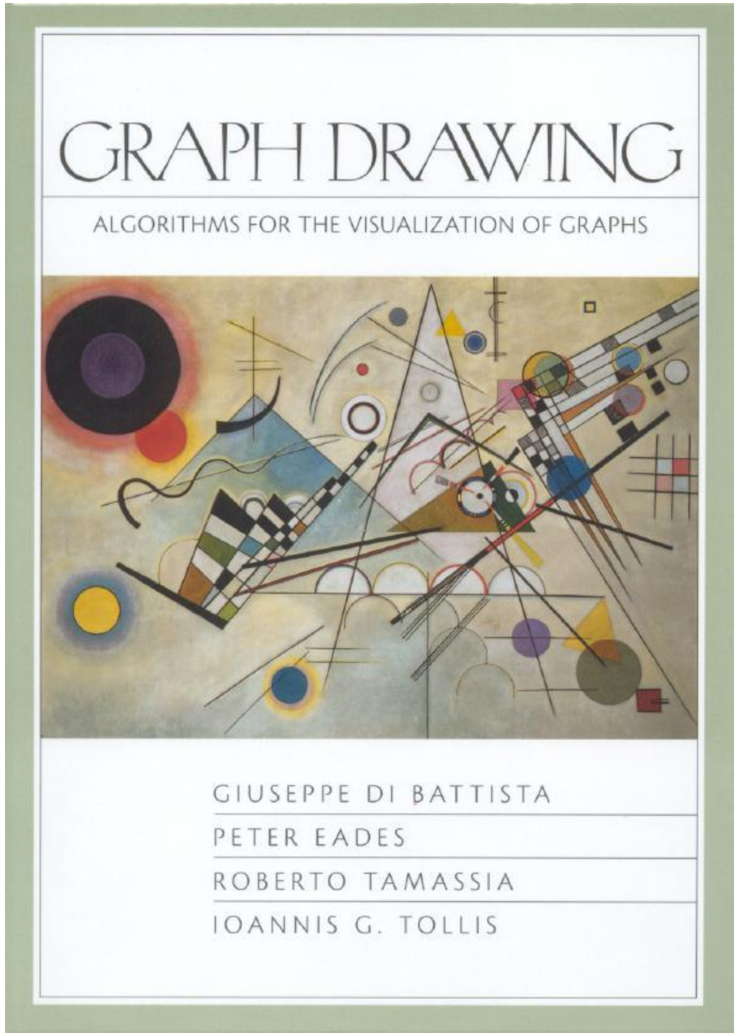
Визуализация графов

Computer Science клуб, март 2014

Александр Дайняк, ФИВТ МФТИ

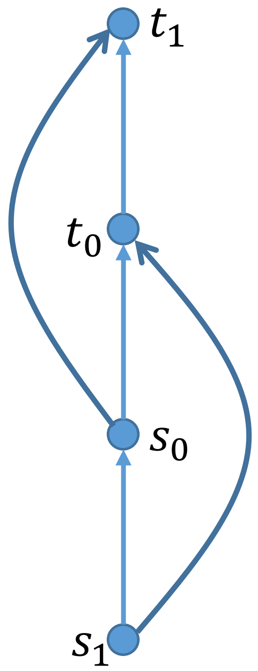
www.dainiak.com

Рассказ будет по гл. 11 из этой книги:

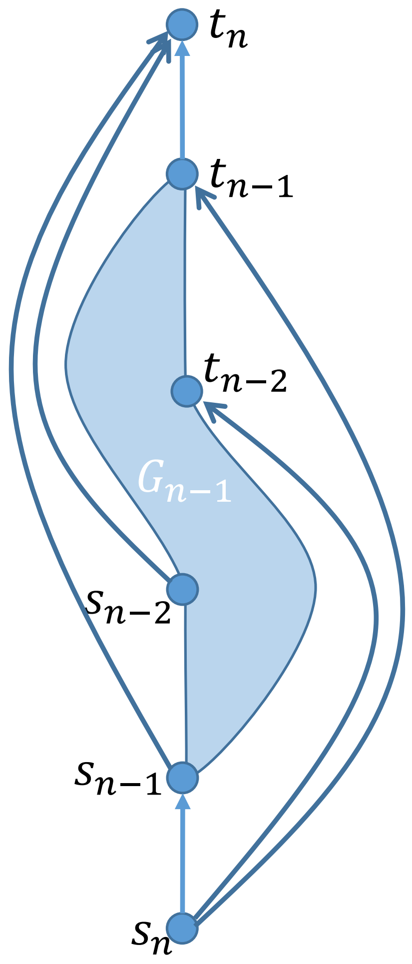


Трудноукладываемый граф

G_1

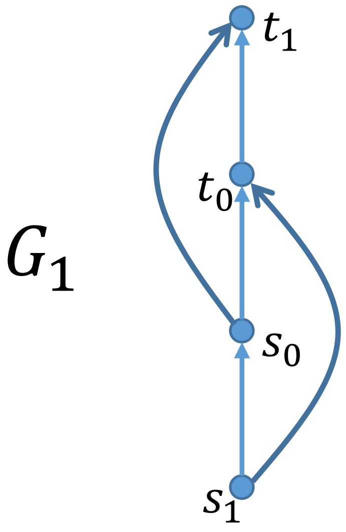


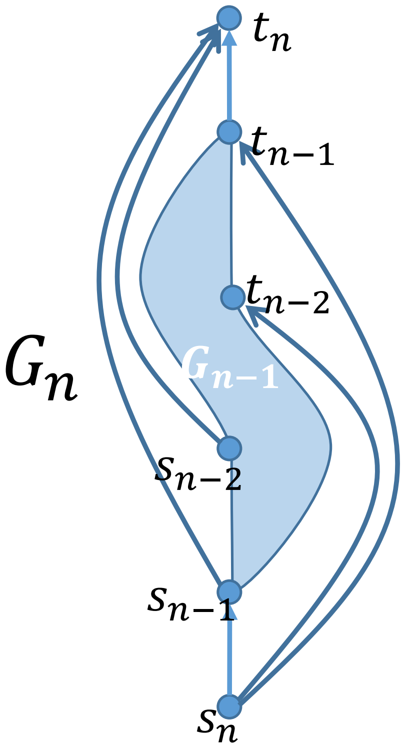
G_n



Прямолинейные упорядоченные укладки

Теорема. Площадь, занимаемая прямолинейной упорядоченной укладкой графа G_n, равна $\Omega(2^n)$ (при условии, что длина рёбер укладки графа G_n ограничена снизу).



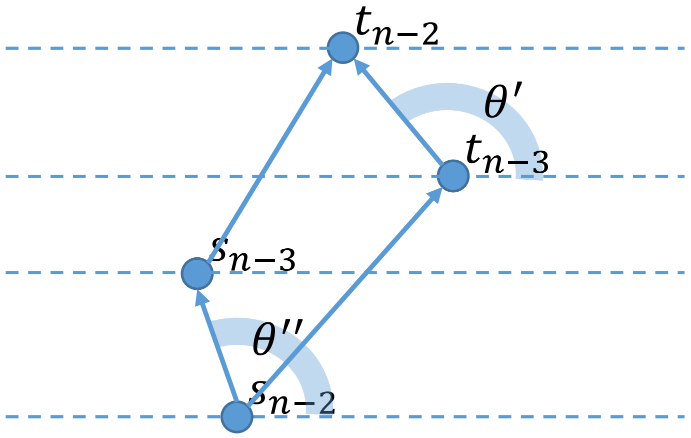


От укладки G_n к укладке G_{n-2}

При $n \geq 2$ граф G_n трёхсвязный, значит его укладка единственна в смысле порядка рёбер на гранях.

Пусть $n \geq 4$ и пусть Γ_n — *оптимальная* укладка G_n.
Удалив из неё $s_n, t_n, s_{n-1}, t_{n-1}$, получим (необязательно оптимальную) укладку G_{n-2}.

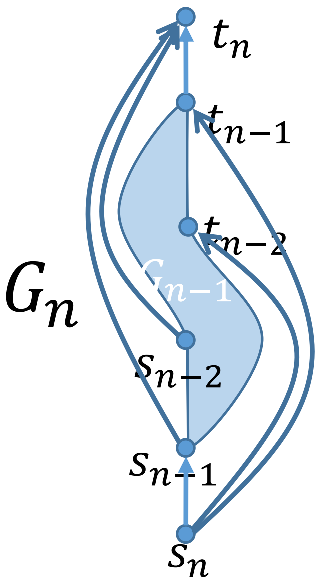
Рассмотрим случай $\theta' \geq \theta''$ (другой случай симметричен).

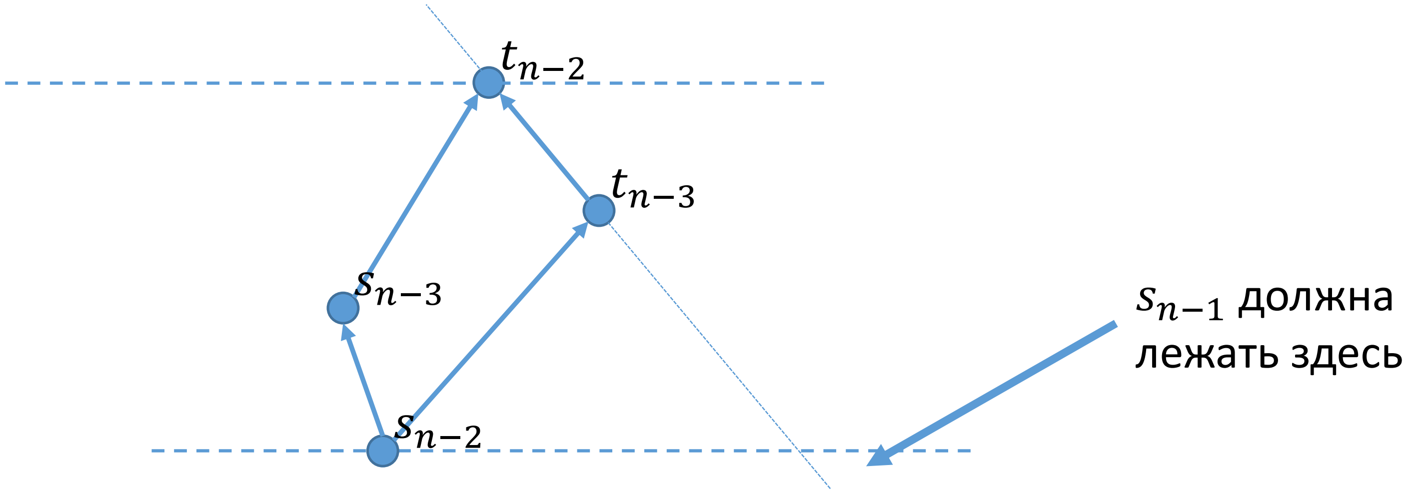


Куда можно добавлять s_{n-1}

Т.к. в графе есть дуги из s_{n-1} в t_{n-2}, t_{n-3}, то s_{n-1} лежит правее прямой $t_{n-2}t_{n-3}$.

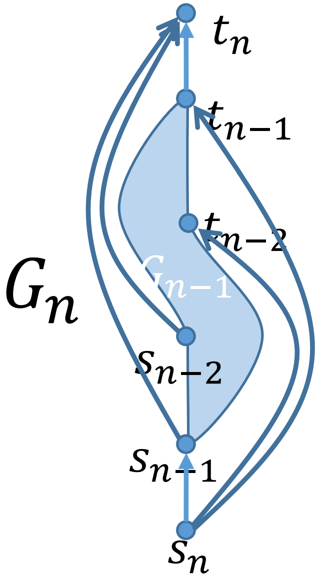
Т.к. есть дуга из s_{n-1} в s_{n-2}, то s_{n-1} лежит ниже горизонтали s_{n-2}.

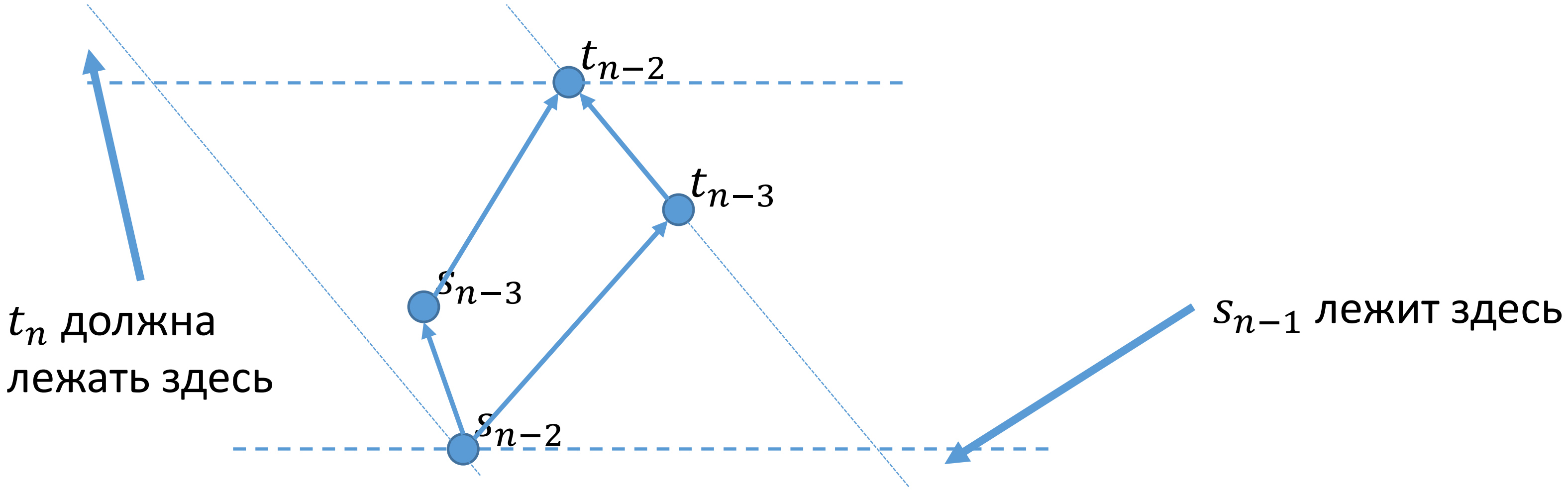




Куда можно добавлять t_n

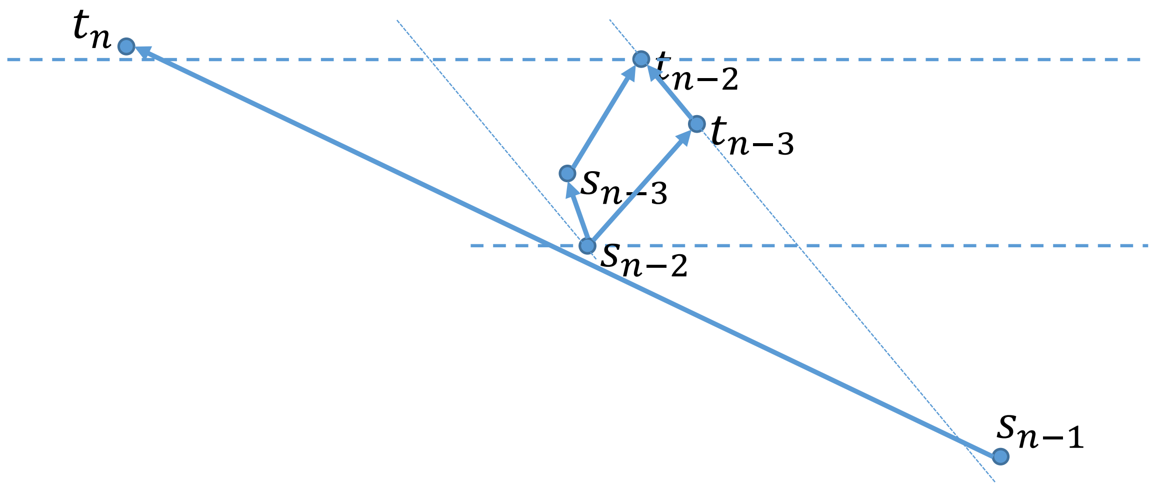
Т.к. t_n соединена с s_{n-1}, s_{n-2}, то t_n лежит левее прямой, параллельной $t_{n-2}t_{n-3}$ и проходящей через s_{n-2}.





Оцениваем площади

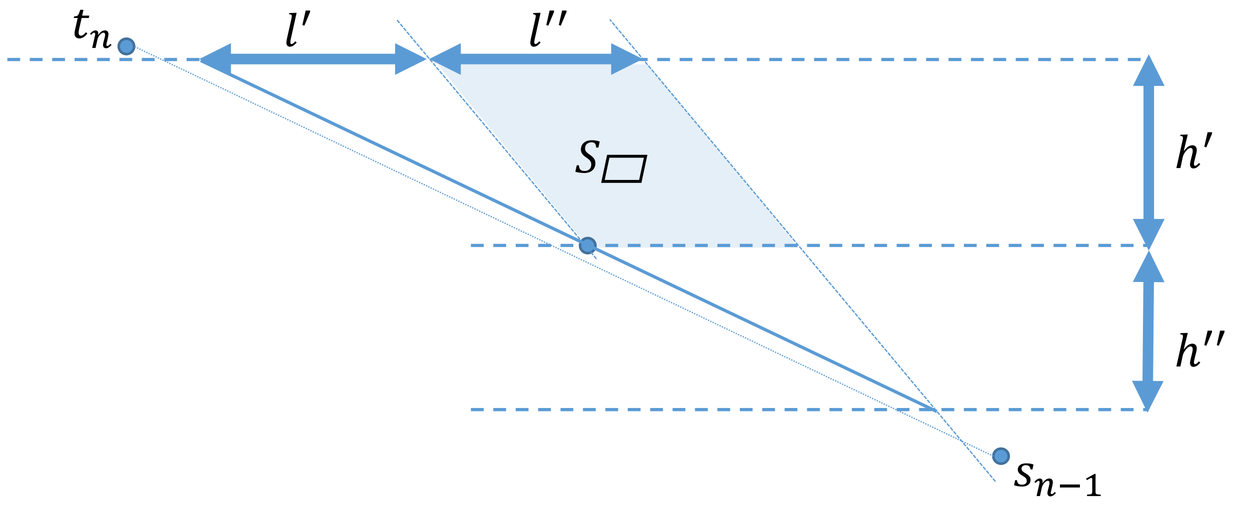
$$S_{\Gamma_n} \geq S_{\Delta_{s_{n-1}t_n t_{n-2}}}$$



Оцениваем площади

$$S_{\Gamma_n} \geq S_{\Delta_{s_{n-1}t_nt_{n-2}}} \geq \frac{1}{2}(h' + h'')(l' + l'') \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{h'h''} \cdot 2\sqrt{l'l''} =$$

$$= 2\sqrt{h'l'' \cdot l'h''} = 2 \cdot S_{\square}$$

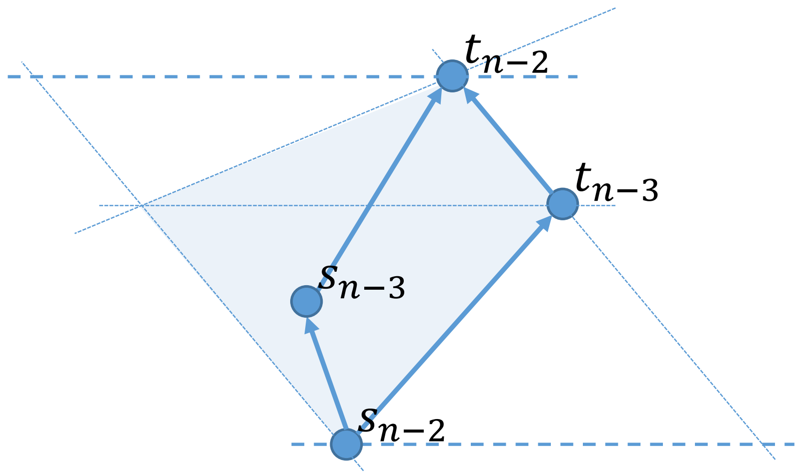


Оцениваем площади

Мы получили, что $S_{\Gamma_n} \geq 2 \cdot S_{\square}$.

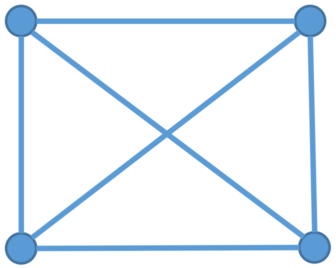
С другой стороны, $S_{s_{n-2}s_{n-3}t_{n-2}t_{n-3}} \leq \frac{1}{2} \cdot S_{\square}$.

Отсюда $S_{\Gamma_n} \geq 4 \cdot S_{s_{n-2}s_{n-3}t_{n-2}t_{n-3}} \geq 4 \cdot S_{\Gamma_{n-2}}$.



Планарные графы

Планарный граф — это граф, для которого существует плоская укладка.

Например, граф  планарный

Утверждение.
В любом планарном графе

$$\#\text{рёбер} \leq 3 \cdot \#\text{вершин} - 6$$

Число скрещиваний (crossing number)

Число скрещиваний графа G — это

$$\operatorname{cr} G \coloneqq \min_{\substack{T\text{ —изобр. }G\\ \text{на плоскости}}} \#\text{пар рёбер, перес. в } T$$

Ясно, что $\operatorname{cr} G = 0$ т. и т.т., когда G планарен.

Точное значение $\operatorname{cr} G$ известно в немногих частных случаях.
Остальное — оценки.

Например, известно, что

$$\operatorname{cr} K_n \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor$$

Быстрых алгоритмов поиска $\operatorname{cr} G$ не известно.

Лемма о видах скрещиваний

Лемма.
Пусть T — изображение простого графа G, в котором ровно $\mathrm{cr}\, G$ скрещиваний рёбер, и пусть каждая точка плоскости участвует не более чем в одном скрещивании.

Пусть e' и e'' — пара рёбер, скрещивающихся в T.

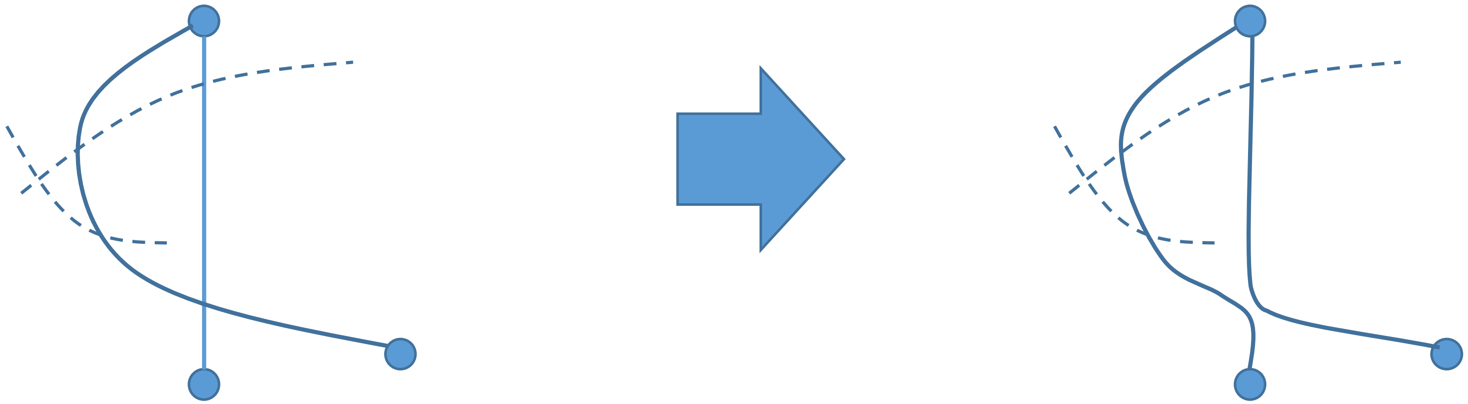
Тогда

- у e' и e'' нет общих концов,
- e' и e'' участвуют лишь в одном скрещивании.

Лемма о видах скрещиваний

Доказательство леммы:

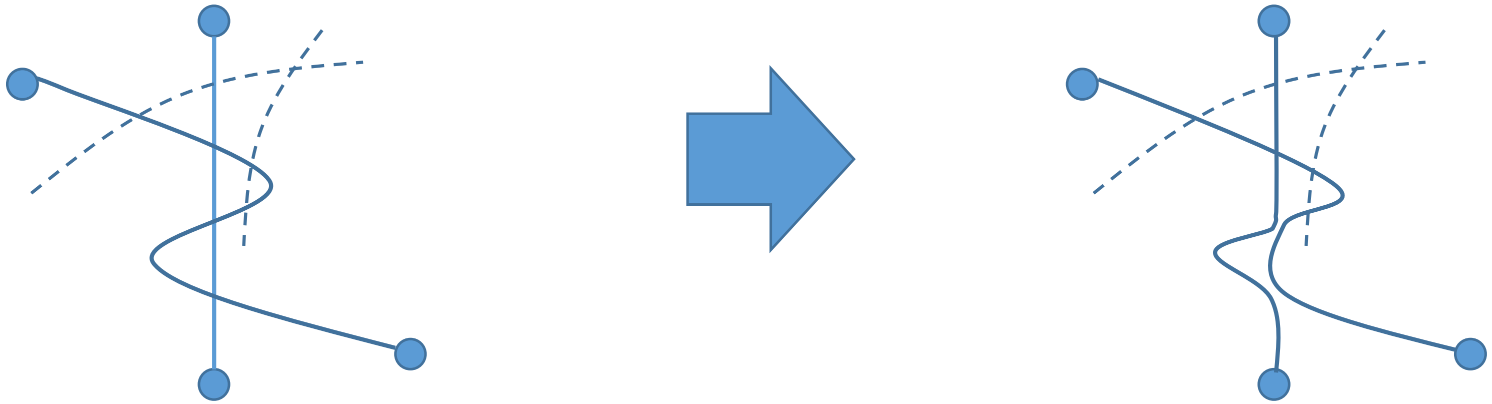
Если бы у e' и e'' был общий конец, то T можно было бы «улучшить» — уменьшить количество скрещиваний:



Лемма о видах скрещиваний

Доказательство леммы:

Если бы e' и e'' участвовали более чем в одном скрещивании, то T можно было бы «улучшить» — уменьшить количество скрещиваний:



Число скрещиваний

Утверждение. $\operatorname{cr} G > \|G\| - 3 \cdot |G|$

Доказательство. Пусть T — изображение G с минимальным (т. е. равным $\operatorname{cr} G$) числом пересечений рёбер.

Будем стирать по одному ребру до тех пор, пока не получится изображение без пересечений. Это укладка некоторого графа G', где

$$\|G'\| = \|G\| - \#\text{стёртых рёбер} \geq \|G\| - \operatorname{cr} G$$

$$\|G'\| \leq 3 \cdot |G'| - 6 = 3 \cdot |G| - 6$$

Отсюда

$$\|G\| - \operatorname{cr} G \leq 3 \cdot |G| - 6 < 3 \cdot |G|.$$

Число скрещиваний

Утверждение.

$$\operatorname{cr} G > \|G\| - 3 \cdot |G|$$

Следствие.
Например, для K_n получаем

$$\operatorname{cr} K_n \gtrsim \frac{n^2}{2}$$

А можно гораздо лучше…

Число скрещиваний

Теорема.

Для любого G, такого, что $\|G\| \geq 4 \cdot |G|$, имеем

$$\operatorname{cr} G > \frac{\|G\|^3}{64 \cdot |G|^2}$$

Следствие.

Для K_n это даёт нам оценку

$$\operatorname{cr} K_n \gtrsim \frac{n^4}{512}$$

— по порядку совпадает с известной верхней.

Д-во теоремы о числе скрещиваний

Пусть T — изображение G с $\operatorname{cr} G$ скрещиваниями.

Выберем случайное подмножество вершин $V' \subseteq V(G)$,
взяв каждую вершину независимо от других с вероятностью p.

Пусть G' — подграф в G, порождённый V'.

Пусть T' — изображение G', получаемое из T удалением лишних вершин и рёбер.

Тогда

$$\#\text{скрещиваний в } T' \geq \operatorname{cr} G' > \|G'\| - 3 \cdot |G'|$$

Д-во теоремы о числе скрещиваний

$$\mathbb{E}[\#\text{скрещиваний в } T'] > \mathbb{E}[\|G'\|] - 3\,\mathbb{E}[|G'|]$$

Разлагая матожидания в суммы индикаторов, получаем

- $\mathbb{E}[|G'|] = |G| \cdot p$
- $\mathbb{E}[\|G'\|] = \|G\| \cdot p^2$
- $\mathbb{E}[\#\text{скрещиваний в } T'] = \operatorname{cr} G \cdot p^4$

Отсюда

$$\operatorname{cr} G > \|G\| \cdot p^{-2} - 3|G| \cdot p^{-3}$$

Взяв $p \coloneqq \frac{4|G|}{\|G\|}$, получим $\operatorname{cr} G > \frac{\|G\|^3}{64 \cdot |G|^2}$.

Плоская единичная укладка

Плоская единичная укладка планарного графа — такая, при которой каждое ребро изображается прямым отрезком единичной длины.

Задача Unit Length Straight-line Drawing (ULPGD):

- Вход: планарный граф
- Вопрос: можно ли построить его плоскую единичную укладку?

Теорема.
Задача ULPGD является NP-трудной.

План доказательства: SAT → NAE-SAT → Logic Engine → ULPGD.

Задача Not-All-Equal-SAT

Задача SAT:

- Вход: КНФ $\mathcal{K} = \cdots \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_s) \wedge \cdots$,
  где $\ell_i \in \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$
- Вопрос: существует ли набор $(x_1, \dots, x_n)$, на котором $\mathcal{K} = \mathrm{True}$

Задача Not-All-Equal-SAT, сокращённо NAE-SAT:

- Вход: набор скобок вида $[\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_s]$, где $\ell_i \in \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$.
- Вопрос: существует ли набор $(x_1, \dots, x_n)$, при котором в каждой скобке не все значения литералов равны.

Задача Not-All-Equal-SAT

Задача Not-All-Equal-SAT, сокращённо NAE-SAT:

- Вход: набор скобок вида $[\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_s]$, где $\ell_i \in \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$.
- Вопрос: существует ли набор $(x_1, \dots, x_n)$, при котором в каждой скобке не все значения литералов равны.

Особенность задачи NAE-SAT

Сведение SAT к NAE-SAT

КНФ задачи SAT: $\mathcal{K} = \cdots \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_s) \wedge \cdots$
где $\ell_i \in \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$

Введём новую переменную z и заменим каждую скобку $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_s)$ задачи SAT на скобку $[\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_s, z]$.

Пусть $(x_1 \leftarrow \alpha_1, \dots, x_n \leftarrow \alpha_n)$ — выполняющий набор для SAT.
Тогда $(x_1 \leftarrow \alpha_1, \dots, x_n \leftarrow \alpha_n, z \leftarrow 0)$ — выполняющий набор для NAE-SAT.

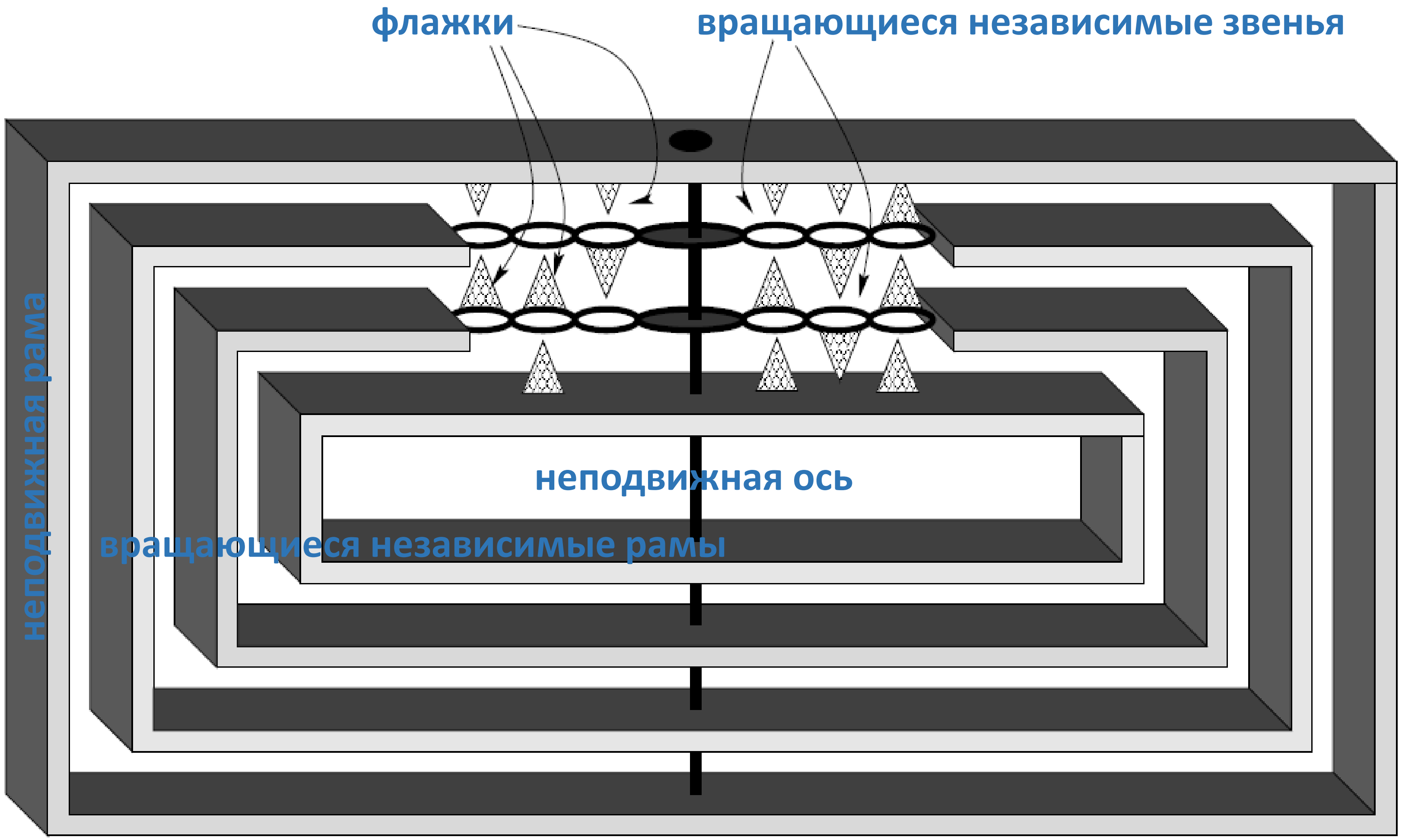
Обратно, если $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)$ — хороший набор для NAE-SAT, то $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — хороший набор для SAT.

(Простой вопрос: а если выполняющий набор для NAE-SAT $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1)$?)

Логическая машина (Logic Engine)

- Если флажки на соседних рамах поворачиваются друг к другу, они сталкиваются.

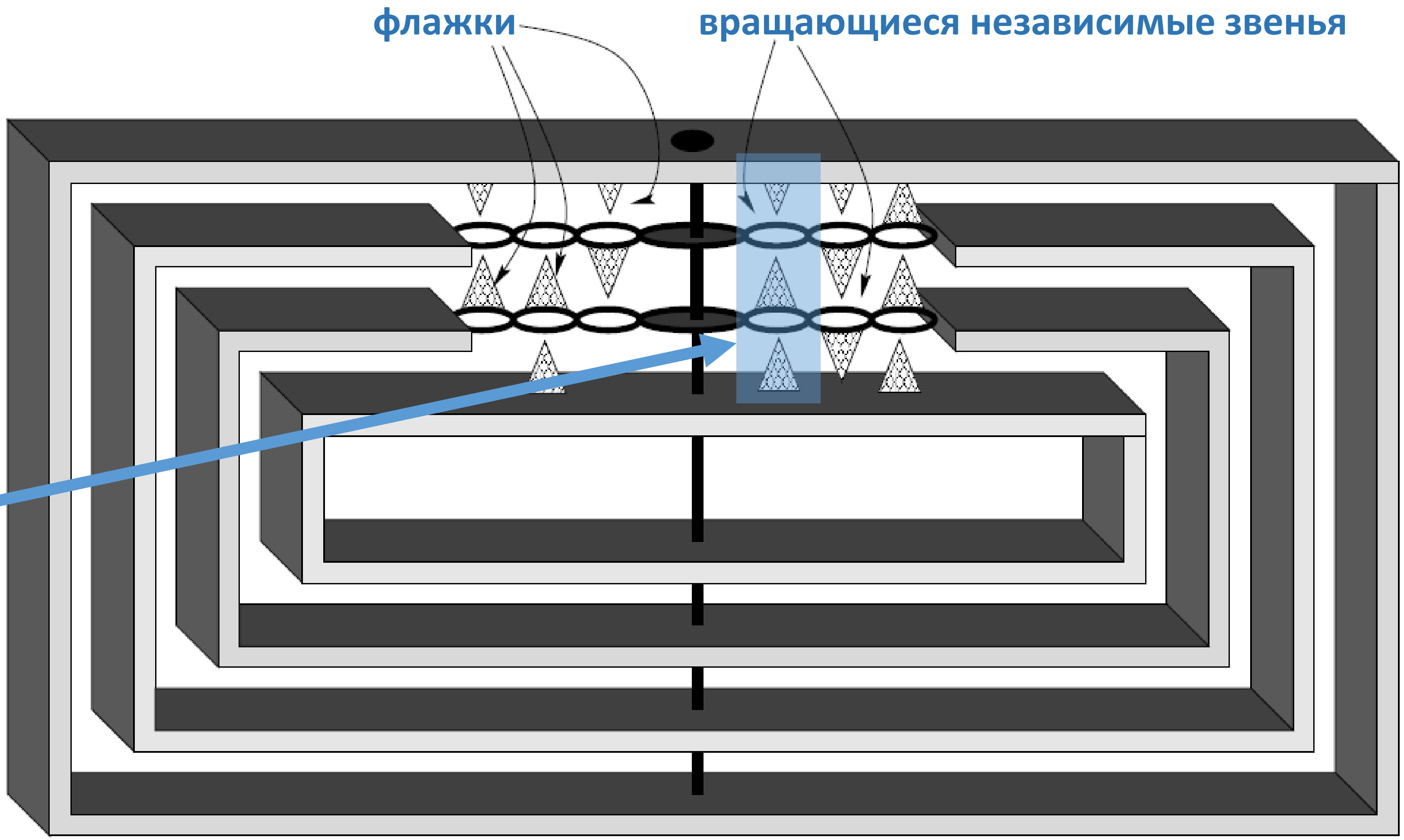
- Задача «о логической машине»: существует ли такое положение машины, при котором флажки не сталкиваются?



Сведение NAE-SAT к Logic Engine

- Каждая рама, кроме внешней и внутренней, соответствует переменной.
- Положение рамы — значение переменной True/False.
- На внешней и внутренней раме везде устанавливаем флажки.

- Каждая линия звеньев соответствует скобке NAE-SAT.

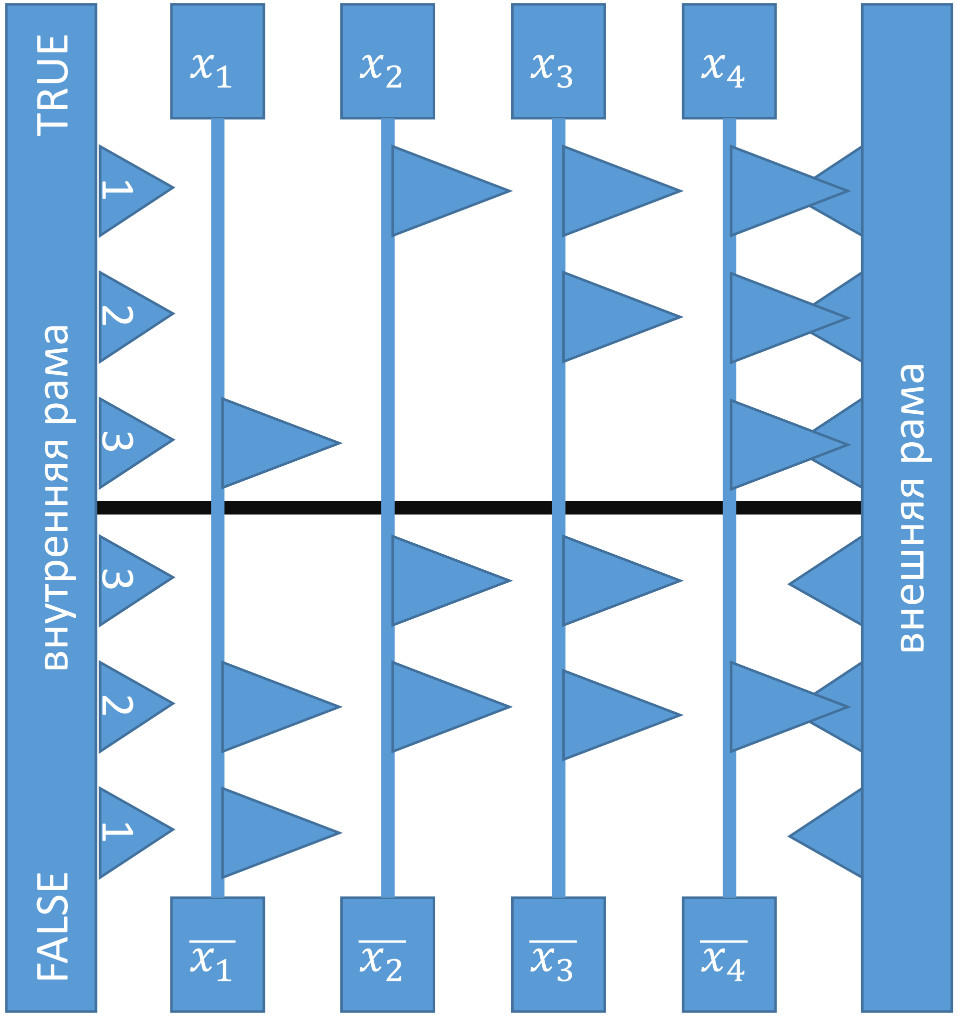


Сведение NAESAT к Logic Engine

Вешаем флажки на все рамы, кроме случаев:

- Если литерал x_i входит в скобку S_j, то на раме i на линии TRUE-j флажок не ставим.
- Если литерал $\overline{x_i}$ входит в скобку S_j, то на раме i на линии FALSE-j флажок не ставим.

Пример: скобки $[x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}]$,
$[x_1, x_2]$,
$[\overline{x_1}, x_2, x_3, \overline{x_4}]$

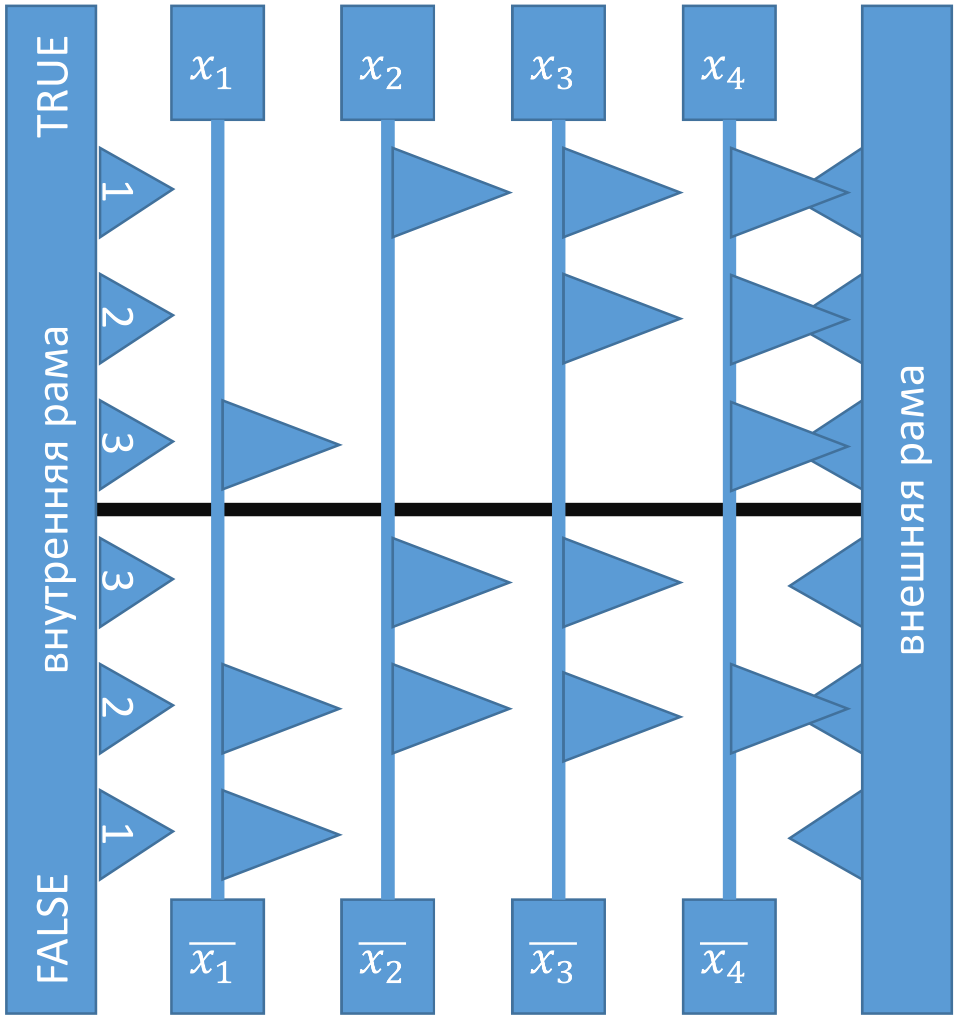


Сведение NAESAT к Logic Engine

Пример: скобки

$$[x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}],$$
$$[x_1, x_2],$$
$$[\overline{x_1}, x_2, x_3, \overline{x_4}]$$

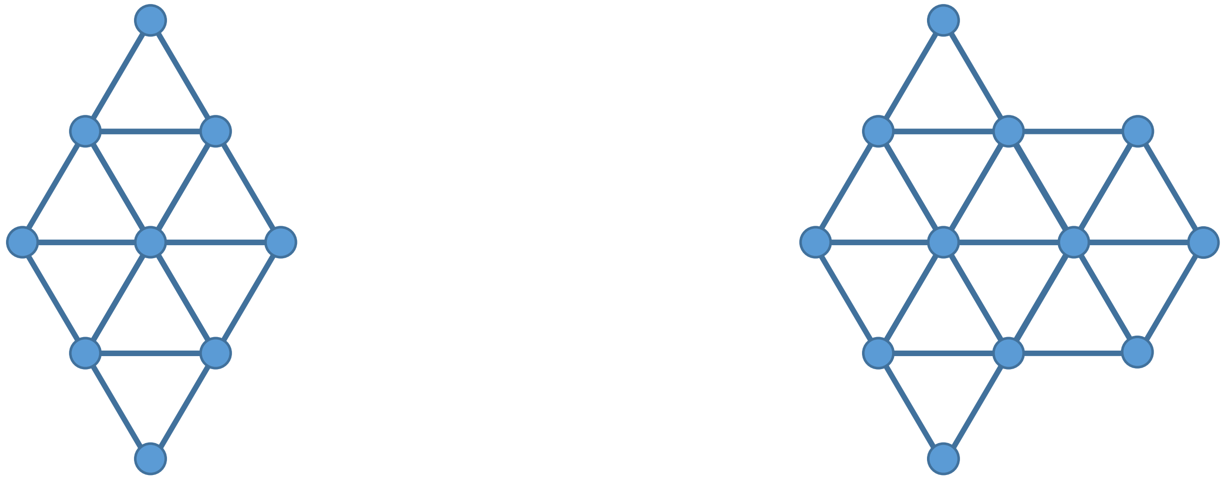
Видно, что нужно повернуть раму x_2, и тогда флажки можно выстроить «без конфликтов».



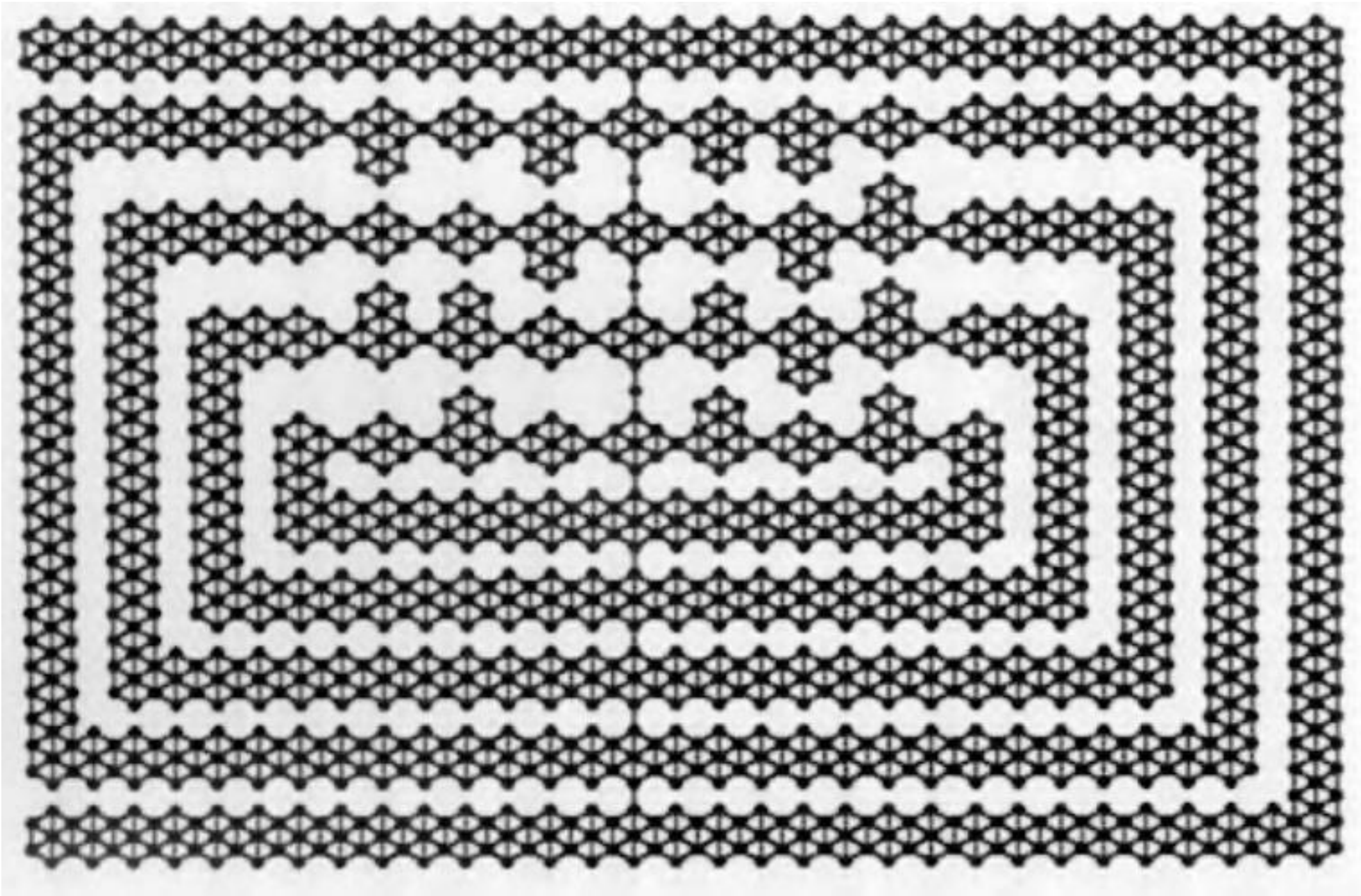
Сведение Logic Engine к ULPGD

Естественная идея: нужен «жёсткий граф».

Жёсткий кусок, допускающий единственную единичную укладку, и этот же кусок с флагом.



Граф, моделирующий Logic Engine



Ещё NP-трудные задачи

Задача Unit Grid Drawing of Trees:

- Вход: дерево (можно сузить до двоичных деревьев)
- Вопрос: можно ли так уложить его на единичной сетке, чтобы рёбра имели длину 1?

Задача Minimum Area Grid Drawing of Trees:

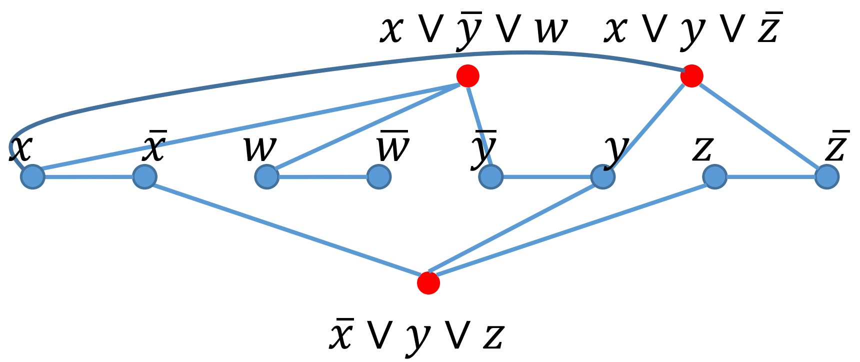
- Вход: дерево T и число A.
- Вопрос: можно ли так уложить T на единичной сетке, чтобы площадь укладки не превзошла A?

Планарная версия задачи SAT

Planar 3-SAT:

- **Вход:** набор скобок, по 3 литерала разных переменных в каждой. Граф соответствий скобок/литералов *планарен* (паре противоположных литералов отвечает пара смежных вершин)
- **Вопрос:** можно ли так присвоить значения литералам, чтобы в каждой скобке оказался хотя бы один истинный литерал?

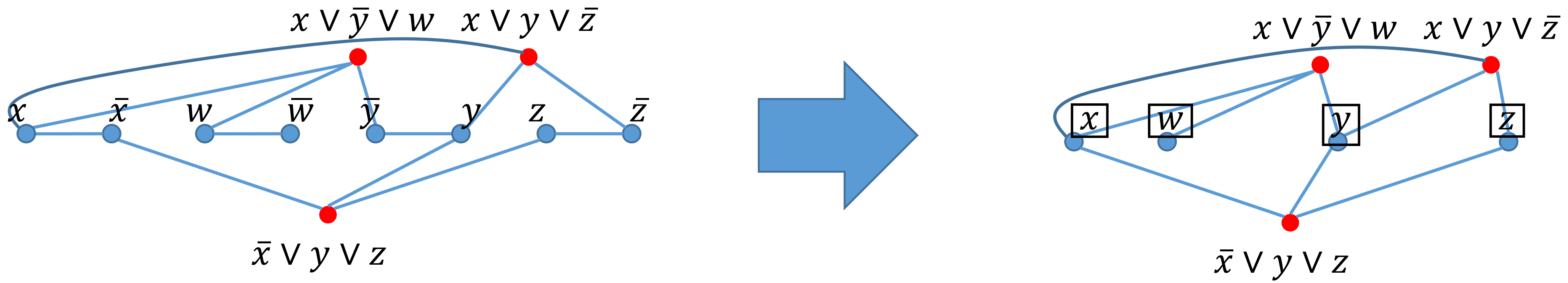
Задача NP-трудна (D. Lichtenstein ’1981).



Сведение 3-SAT к Planar 3-SAT

Для удобства сначала рассмотрим Weak Planar 2-3-SAT:

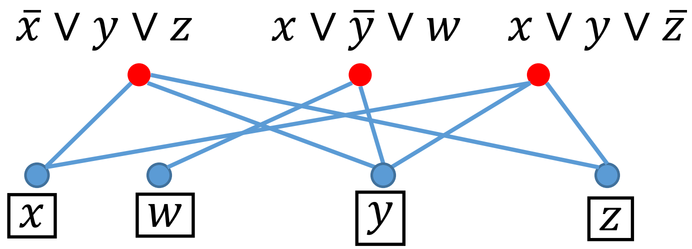
- В скобках может быть 2 или 3 литерала.
- Каждой переменной соответствует не две, а одна вершина.



Переход от 3-КНФ к «слабопланарной» 2-3-КНФ

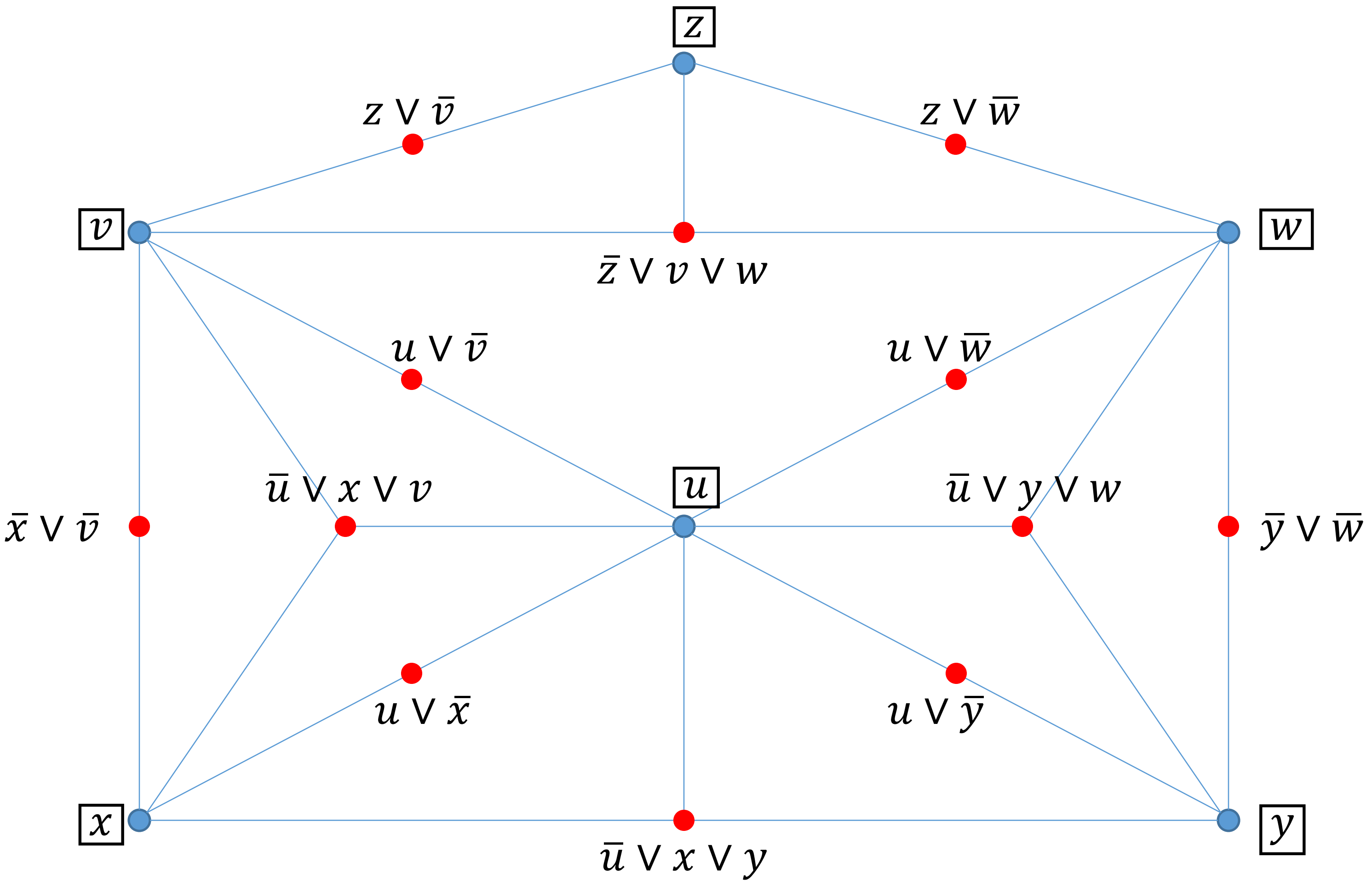
Пусть задана произвольная 3-КНФ.

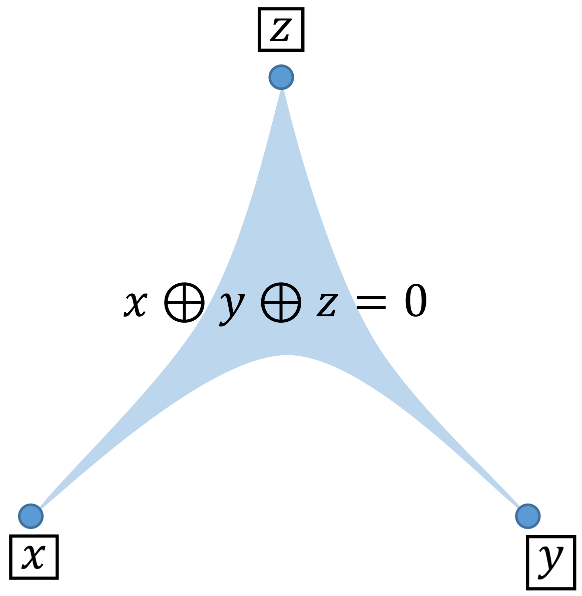
Уложим её в два слоя, невзирая на скрещивания:



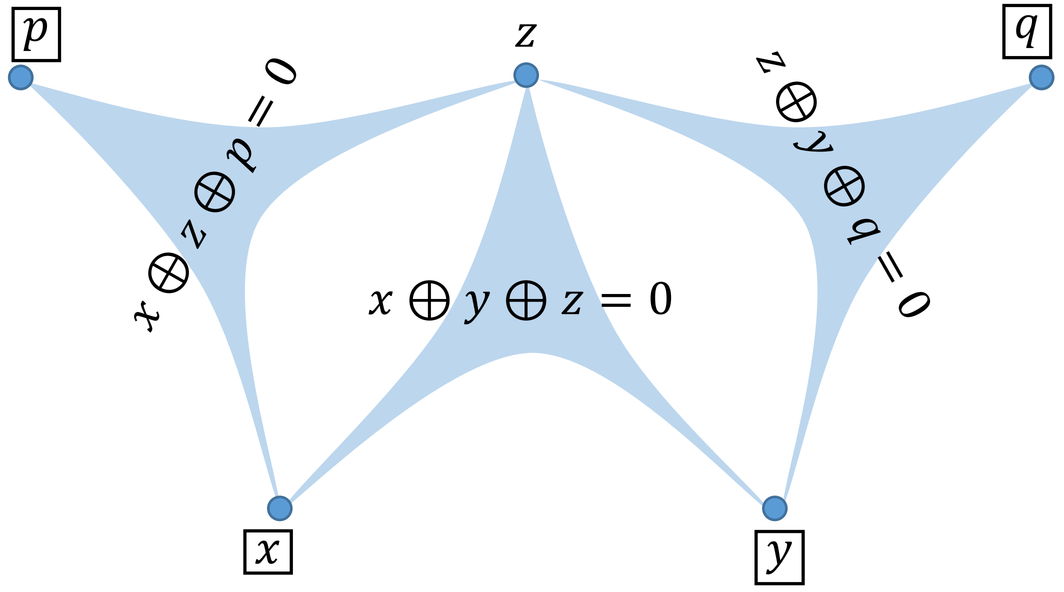
Дальше поднимаемся по каждому ребру снизу вверх и устраняем скрещивания…

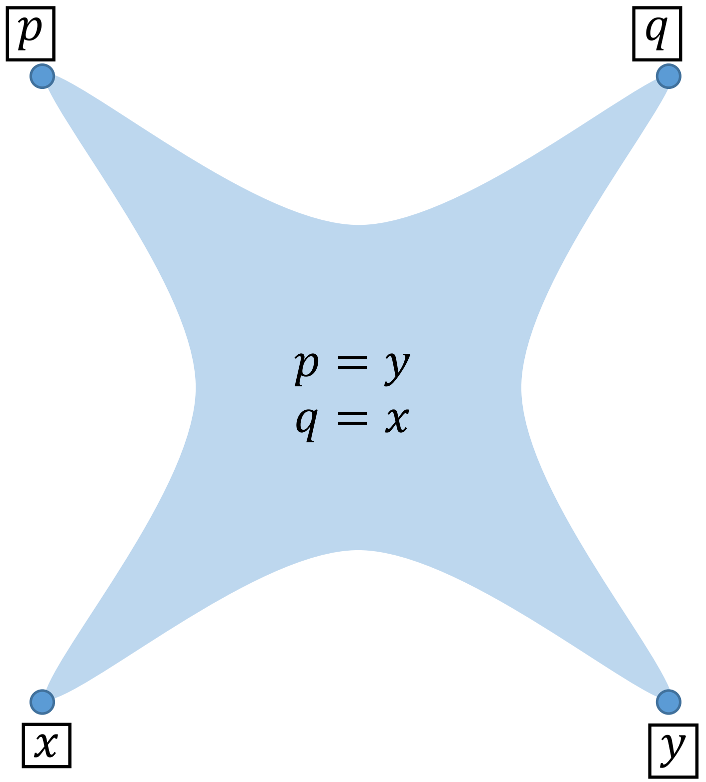
Фрагмент проверки «$x \oplus y \oplus z = 0$»





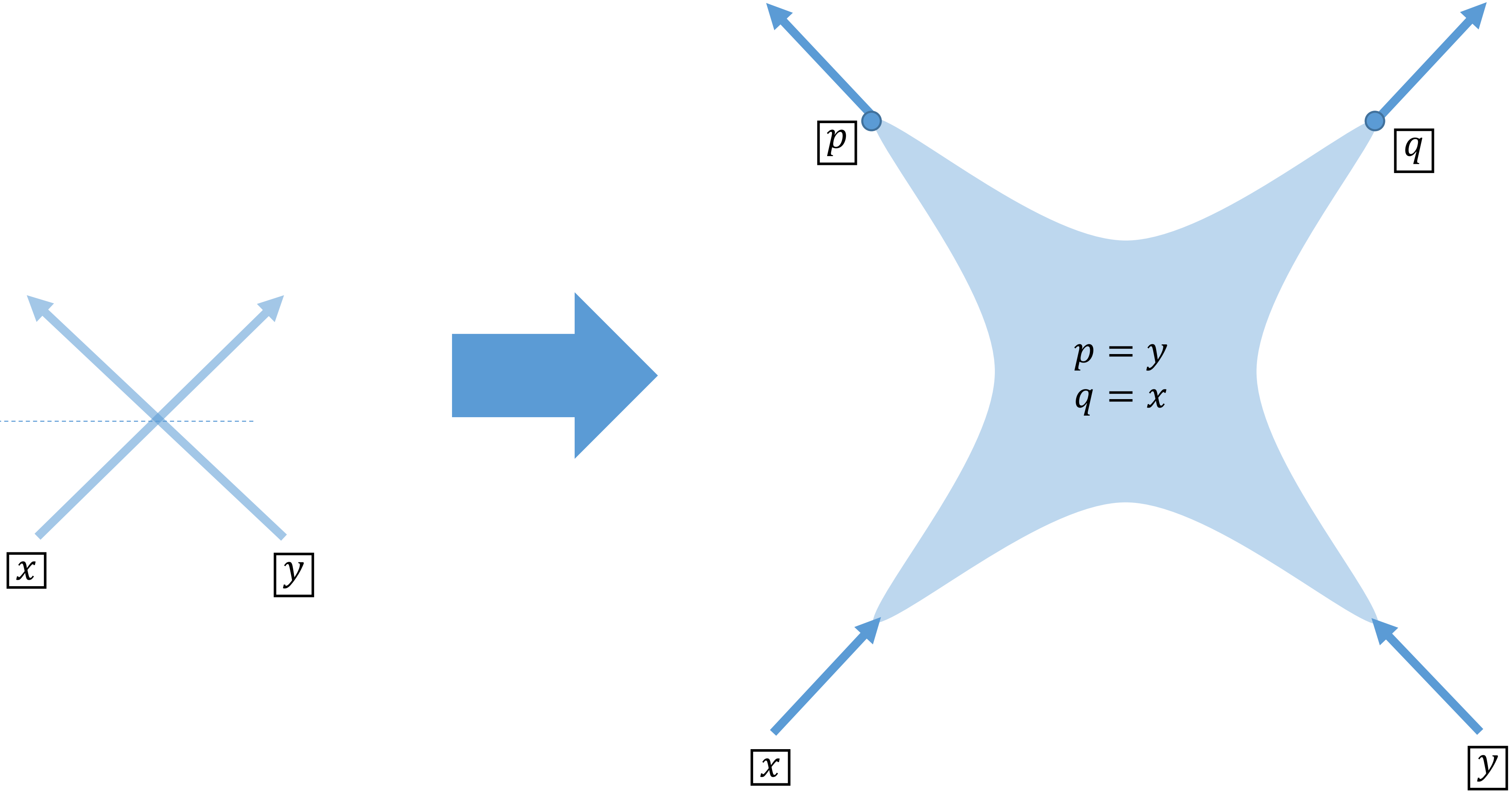
Фрагмент, устраняющий скрещивание





Борьба с единичным скрещиванием

Ниже черты эта пара рёбер не участвует ни в каких скрещиваниях

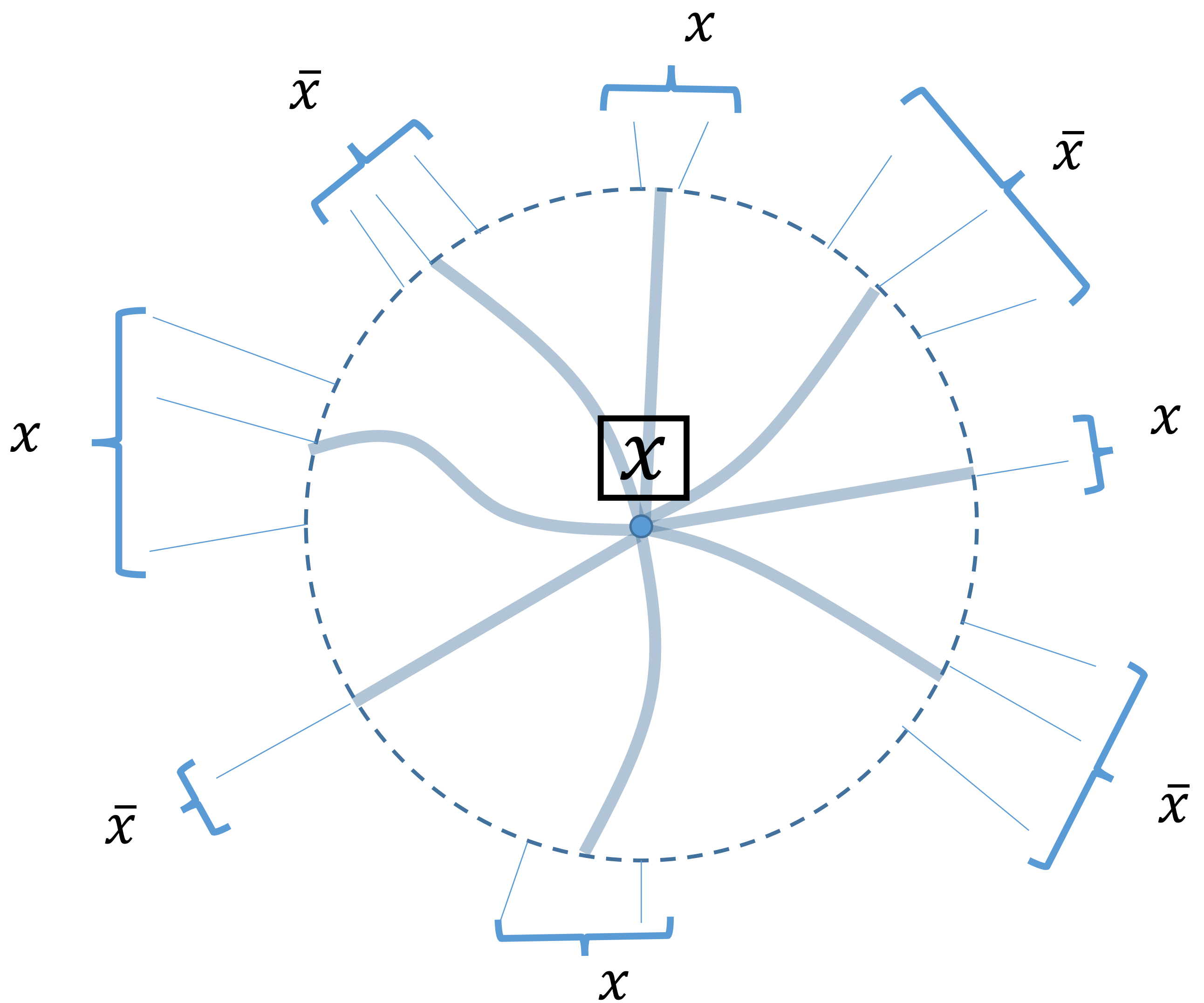


Переход от слабопланарной к планарной КНФ

Берём укладку графа,
в котором литералы одной переменной склеены.

Нужно построить граф,
в котором противоположным литералам отвечают смежные вершины.

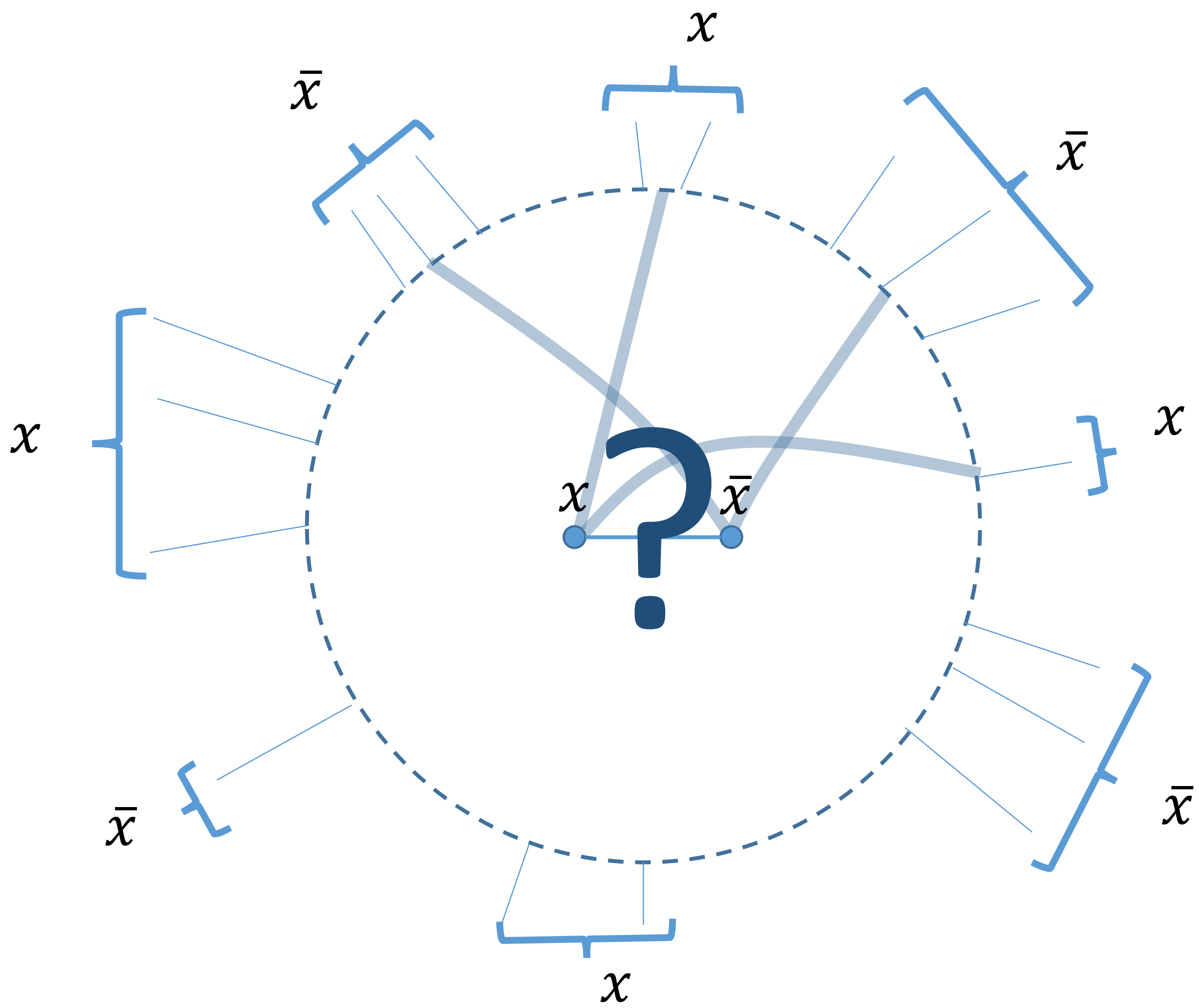
При этом КНФ можно менять на эквивалентную.



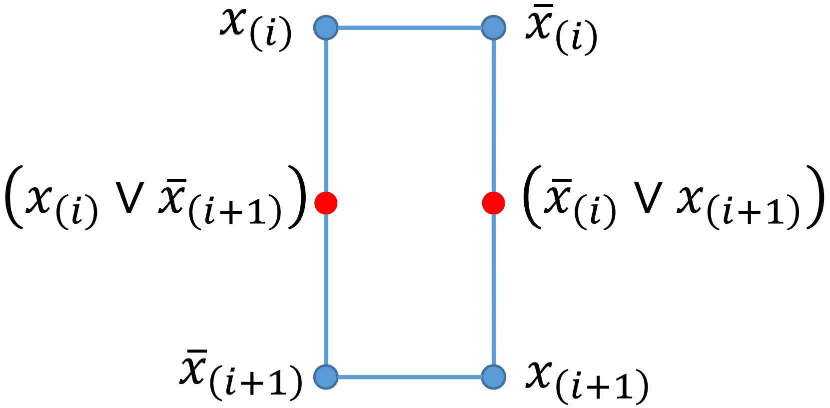
Переход от переменных к литералам

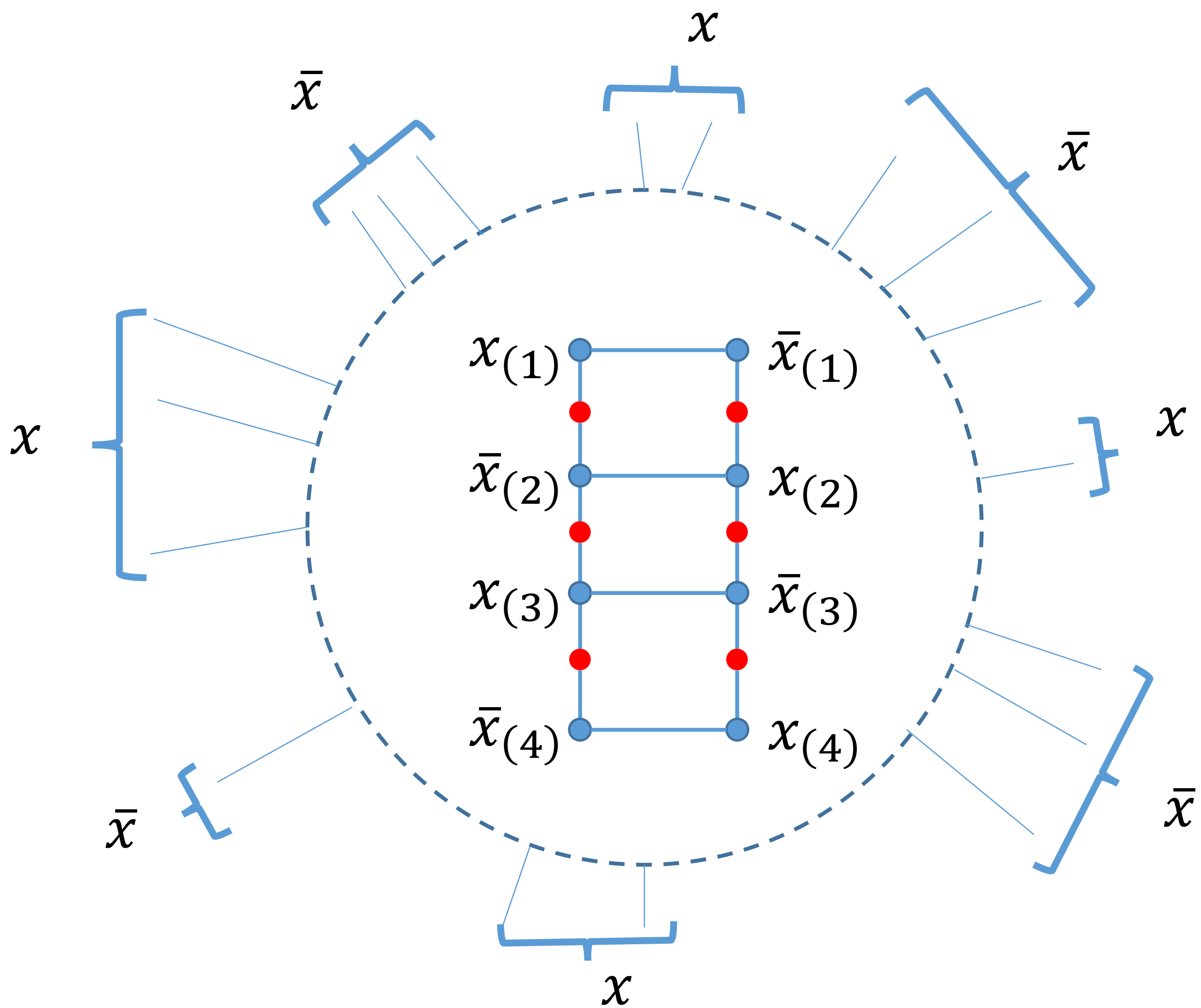
Если каждую вершину просто «расщепить», то может исчезнуть планарность.

Выход: введение дополнительных переменных.

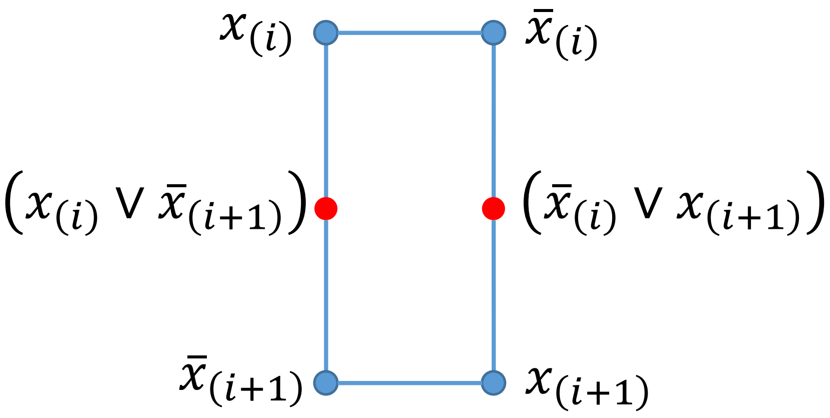


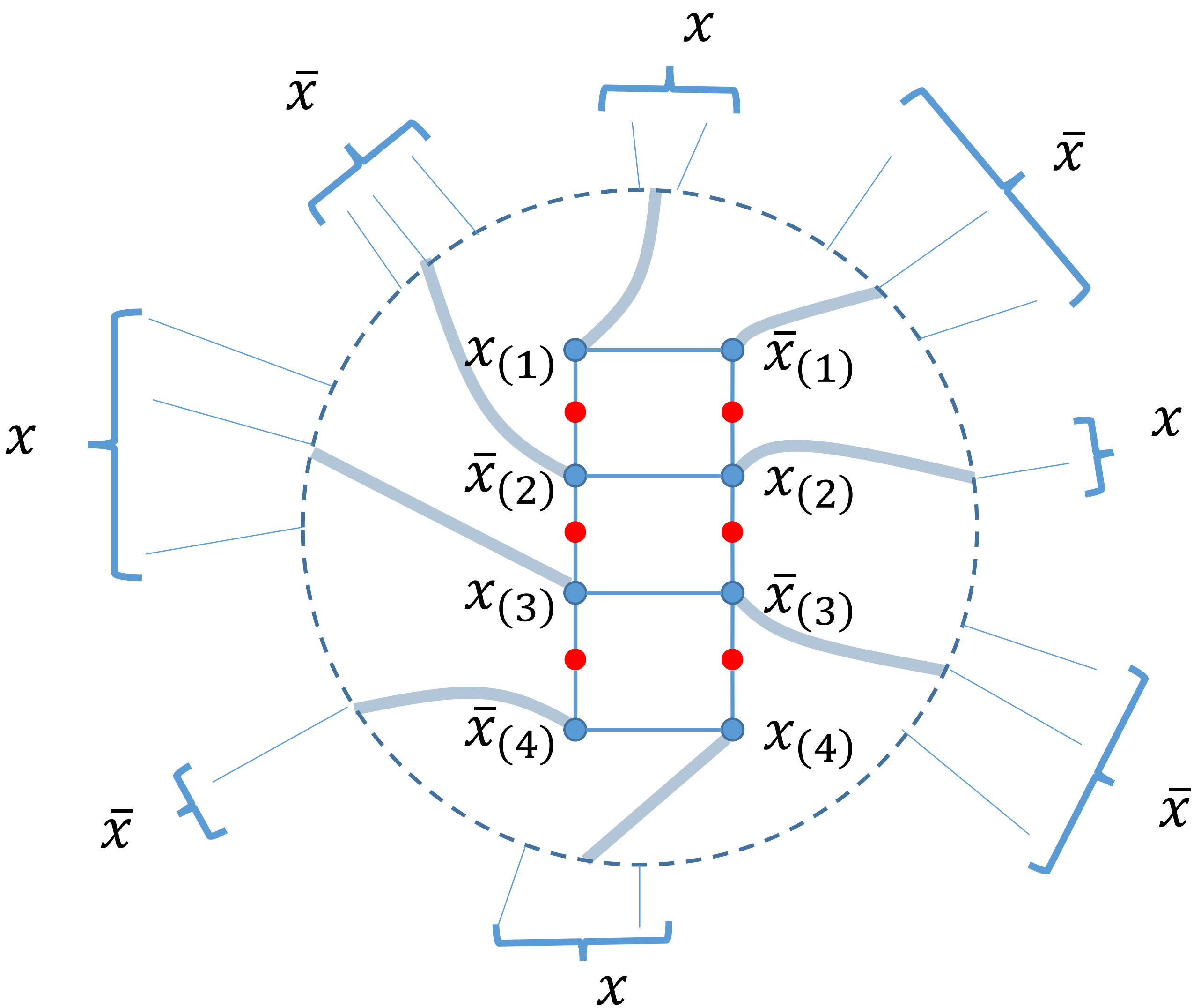
Переход от переменных к литералам



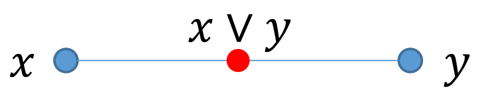


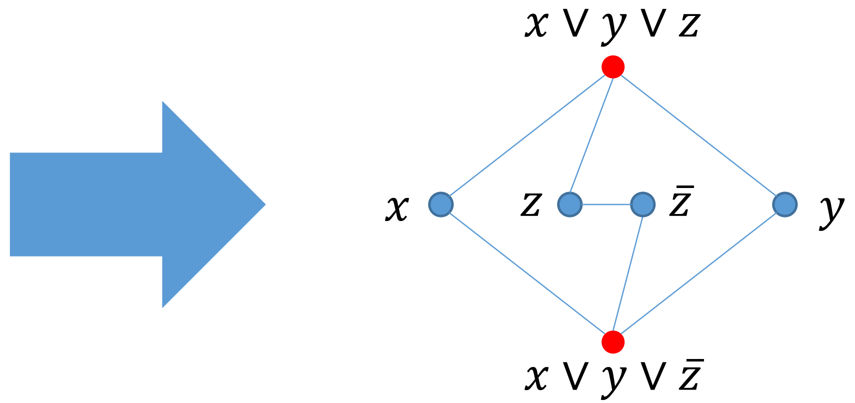
Переход от переменных к литералам





Переход от 2-3-КНФ к 3-КНФ





О планарных версиях SAT

Positive Planar 1-in-3-SAT:

- **Вход:** набор скобок, по 3 литерала *без отрицаний* в каждой. Граф соответствий скобок/литералов *планарен*.
- **Вопрос:** можно ли так присвоить значения литералам, чтобы в каждой скобке оказался *ровно* один истинный литерал?

Задача NP-трудна (W. Mulzer, G. Rote ’2006).

О планарных версиях SAT

Planar NAE-SAT:

- **Вход:** набор скобок.
  Граф соответствий скобок/литералов *планарен* (паре противоположных литералов отвечает пара смежных вершин).
- **Вопрос:** можно ли так присвоить значения литералам, чтобы в каждой скобке не все литералы были равны?

Задача полиномиально разрешима (B.M.E. Moret ’1988).