Введение в модальную логику, Лекция 2

Даня Рогозин
МГУ, Serokell

19 октября
Computer Science Club
ПОМИ РАН

На прошлой лекции мы

- Определили модальный язык
- Ввели модели и шкалы Крипке
- Ввели формулы $\mathbf{AT}$, $\mathbf{A}4$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{ACR}$, $\mathbf{AB}$
- Определили p-морфизмы шкал и моделей Крипке
- С помощью p-морфизмов показали, что иррефлексивность невыразима в модальном языке

Нормальная модальная логика

Определение

Множество формул $\mathcal{L}$ называется нормальной модальной логикой, если:

Нормальная модальная логика

Определение

Множество формул $\mathcal{L}$ называется нормальной модальной логикой, если:

- *Все булевы тавтологии содержатся в $\mathcal{L}$*

Нормальная модальная логика

Определение

Множество формул $\mathcal{L}$ называется нормальной модальной логикой, если:

- *Все булевы тавтологии содержатся в $\mathcal{L}$*
- *В $\mathcal{L}$ содержится формула* **AK** $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Нормальная модальная логика

Определение

Множество формул $\mathcal{L}$ называется нормальной модальной логикой, если:

- *Все булевы тавтологии содержатся в $\mathcal{L}$*
- *В $\mathcal{L}$ содержится формула* **AK** $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- *$\mathcal{L}$ замкнуто относительно следующих правил:*

  MP $\phi \in \mathcal{L} \,\&\, \phi \to \psi \in \mathcal{L} \Rightarrow \psi \in \mathcal{L}$

  Nec $\phi \in \mathcal{L} \Rightarrow \Box\phi \in \mathcal{L}$

  Sub $\phi(p) \in \mathcal{L} \Rightarrow \phi[p := \psi]$, *где* $\psi \in Fm$

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

$\square$

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Общезначимость тавтологий и замкнутость $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ относительно **MP** очевидна. Покажем, что в произвольной шкале общезначима формула **AK**

$\square$

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Общезначимость тавтологий и замкнутость $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ относительно **MP** очевидна. Покажем, что в произвольной шкале общезначима формула **AK**

Proof.

Пусть $\vartheta : \mathbb{V} \to 2^W$ — это оценка и пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ — это модель на шкале $\mathcal{F}$. Предположим, что для для любого $w \in W$, если $\mathcal{M}, w \models \Box(p \to q)$ и $\mathcal{M}, w \models \Box p$. Тогда для любого $v \in R(w)$, $\mathcal{M}, v \models p \to q$ и $\mathcal{M}, v \models p$. Отсюда, $\mathcal{M}, v \models q$. Тогда и $\mathcal{M}, w \models \Box q$. □

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Показажем, $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правила Nec.

$\square$

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Покажем, $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правила Nec.

Proof.

Пусть $\mathcal{F} \models \phi$. Тогда при любой оценке ϑ и при любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$, для любого $x \in W$, $\mathcal{M}, x \models \phi$. Легко понять, что $\mathcal{M}, x \models \Box\phi$. □

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$*, тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Покажем, $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правила Sub. Для этого введем оценку формулы $||\phi||_{\mathcal{M}} = \{x \in W \mid \mathcal{M}, x \models \phi\}$, где $\mathcal{M}$ — это модель.

$\square$

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Покажем, $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правила Sub. Для этого введем оценку формулы $||\phi||_{\mathcal{M}} = \{x \in W \mid \mathcal{M}, x \models \phi\}$, где $\mathcal{M}$ — это модель.

Proof.

Пусть $\mathcal{F} \models \phi(p)$, ψ — это модальная формула и $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ — модель.
Посмотрим модель $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}, \vartheta' \rangle$, такую что $\vartheta'(p) = ||\psi||_{\mathcal{M}}$.

□

Теорема корректности

Теорема

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, *тогда* $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Покажем, $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правила Sub. Для этого введем оценку формулы $||\phi||_{\mathcal{M}} = \{x \in W \mid \mathcal{M}, x \models \phi\}$, где $\mathcal{M}$ — это модель.

Proof.

Пусть $\mathcal{F} \models \phi(p)$, ψ — это модальная формула и $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ — модель. Посмотрим модель $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}, \vartheta' \rangle$, такую что $\vartheta'(p) = ||\psi||_{\mathcal{M}}$. Несложной индукцией по ϕ можно установить следующую эквивалентность:
$\mathcal{M}, x \models \phi[x := \psi] \Leftrightarrow \mathcal{M}', x \models \phi(p)$ □

Теорема корректности относительно класса шкал

Следствие

Пусть $\mathbb{F}$ *— это класс шкал Крипке, тогда* $\mathrm{Log}(\mathbb{F})$ *— это нормальная модальная логика*

$\square$

Теорема корректности относительно класса шкал

Следствие

Пусть $\mathbb{F}$ *— это класс шкал Крипке, тогда* $\mathrm{Log}(\mathbb{F})$ *— это нормальная модальная логика*

Proof.

По определению, $\mathrm{Log}(\mathbb{F}) = \bigcap\limits_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathrm{Log}(\mathcal{F})$. По теореме корректности, для каждого $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$, $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ — нормальная модальная логика. Тогда в каждом множестве $\mathrm{Log}(\mathcal{F})$ содержатся булевы тавтологии, аксиома нормальности, и оно замкнуто относительно трех правил. □

Минимальная нормальная модальная логика

Определение

Минимальная нормальная модальная логика **K** *задается следующими аксиомами и правилами вывода*

1. *Аксиомы классической логики высказываний (см. любой учебник по математической логике)*
2. *Аксиома нормальности (или аксиома Крипке)* $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
3. *Правила вывода:*

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \textbf{MP} \qquad \frac{\phi}{\Box\phi}\ \textbf{Nec} \qquad \frac{\phi(p)}{\phi[p := \psi]}\ \textbf{Sub}$$

Минимальная нормальная модальная логика

Определение

Минимальная нормальная модальная логика **K** *задается следующими аксиомами и правилами вывода*

1. *Аксиомы классической логики высказываний (см. любой учебник по математической логике)*
2. *Аксиома нормальности (или аксиома Крипке)* $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
3. *Правила вывода:*

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \mathbf{MP} \qquad \frac{\phi}{\Box\phi}\ \mathbf{Nec} \qquad \frac{\phi(p)}{\phi[p := \psi]}\ \mathbf{Sub}$$

Выводом в минимальной нормальной модальной логике **K** называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих формул по правилам **MP**, **Nec**, **Sub**

Пример вывода в K

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \land q) \leftrightarrow (\Box p \land \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

Пример вывода в K

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

$$(1) \quad (p \wedge q) \to p, (p \wedge q) \to q$$

Аксиомы классической логики высказываний

Пример вывода в K

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

(1) $(p \wedge q) \to p, (p \wedge q) \to q$

Аксиомы классической логики высказываний

(2) $\Box((p \wedge q) \to p), \Box((p \wedge q) \to q)$

Применение правила **Nec** к обеим формулам из (1)

Пример вывода в $\mathbf{K}$

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

(1) $(p \wedge q) \to p, (p \wedge q) \to q$

Аксиомы классической логики высказываний

(2) $\Box((p \wedge q) \to p), \Box((p \wedge q) \to q)$

Применение правила **Nec** к обеим формулам из (1)

(3) $\Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p), \Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$

Частные случаи аксиомы нормальности, полученные по **Sub**

Пример вывода в $\mathbf{K}$

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

(1) $(p \wedge q) \to p, (p \wedge q) \to q$
   Аксиомы классической логики высказываний
(2) $\Box((p \wedge q) \to p), \Box((p \wedge q) \to q)$
   Применение правила **Nec** к обеим формулам из (1)
(3) $\Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p), \Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$
   Частные случаи аксиомы нормальности, полученные по **Sub**
(4) $\Box(p \wedge q) \to \Box p, \Box(p \wedge q) \to \Box q$
   (2), (3), **MP**

Пример вывода в **K**

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

(1) $(p \wedge q) \to p, (p \wedge q) \to q$

Аксиомы классической логики высказываний

(2) $\Box((p \wedge q) \to p), \Box((p \wedge q) \to q)$

Применение правила **Nec** к обеим формулам из (1)

(3) $\Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p)$, $\Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$

Частные случаи аксиомы нормальности, полученные по **Sub**

(4) $\Box(p \wedge q) \to \Box p, \Box(p \wedge q) \to \Box q$

(2), (3), **MP**

(5) $(\Box(p \wedge q) \to \Box p) \to ((\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)))$

Булева тавтология

Пример вывода в $\mathbf{K}$

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем импликацию слева направо.

(1) $(p \wedge q) \to p, (p \wedge q) \to q$

Аксиомы классической логики высказываний

(2) $\Box((p \wedge q) \to p), \Box((p \wedge q) \to q)$

Применение правила **Nec** к обеим формулам из (1)

(3) $\Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p), \Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$

Частные случаи аксиомы нормальности, полученные по **Sub**

(4) $\Box(p \wedge q) \to \Box p, \Box(p \wedge q) \to \Box q$

(2), (3), **MP**

(5) $(\Box(p \wedge q) \to \Box p) \to ((\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)))$

Булева тавтология

(6) $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$

(4), (5), **MP**

Пример вывода в K

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \land q) \leftrightarrow (\Box p \land \Box q)$. Докажем обратную.

Пример вывода в $\mathbf{K}$

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем обратную.

$$(1) \quad p \to (q \to (p \wedge q))$$

Аксиома классической логики высказываний

Пример вывода в $\mathbf{K}$

Показем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем обратную.

(1) $p \to (q \to (p \wedge q))$
Аксиома классической логики высказываний

(2) $\Box(p \to (q \to (p \wedge q)))$
(1), **Nec**

Пример вывода в **K**

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем обратную.

(1) $p \to (q \to (p \wedge q))$

Аксиома классической логики высказываний

(2) $\Box(p \to (q \to (p \wedge q)))$

(1), **Nec**

(3) $\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$

(2), аксиома нормальности, **MP**

Пример вывода в K

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем обратную.

(1) $p \to (q \to (p \wedge q))$

Аксиома классической логики высказываний

(2) $\Box(p \to (q \to (p \wedge q)))$

(1), **Nec**

(3) $\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$

(2), аксиома нормальности, **MP**

(4) $\Box p \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$

(3), аксиома нормальности, **MP**, транзитивность

Пример вывода в **K**

Покажем, что $\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Докажем обратную.

(1) $p \to (q \to (p \wedge q))$

Аксиома классической логики высказываний

(2) $\Box(p \to (q \to (p \wedge q)))$

(1), **Nec**

(3) $\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$

(2), аксиома нормальности, **MP**

(4) $\Box p \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$

(3), аксиома нормальности, **MP**, транзитивность

(5) $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q))$

Частный случай булевой тавтологии, **Sub**

Полнота по Крипке

Определение

Нормальная модальная логика $\mathcal{L}$ полна по Крипке, если она является логикой некоторого класса шкал. То есть, существует класс $\mathbb{F}$, такой, что $\mathcal{L} = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$.

Полнота по Крипке

Определение

Нормальная модальная логика $\mathcal{L}$ *полна по Крипке, если она является логикой некоторого класса шкал. То есть, существует класс* $\mathbb{F}$*, такой, что* $\mathcal{L} = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$.

Следующая цель: теорема о полноте для минимальной нормальной модальной логики

Теорема

Пусть $\mathbb{F}$ *— это класс всех шкал Крипке, тогда* $\mathbf{K} = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$.

(Максимально) непротиворечивые множества

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика. Множество формул Γ $\mathcal{L}$-противоречиво, если найдутся формулы $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma$, такие, что $\neg \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \mathcal{L}$. В противном случае, Γ $\mathcal{L}$-непротиворечиво.

(Максимально) непротиворечивые множества

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика. Множество формул Γ $\mathcal{L}$-противоречиво, если найдутся формулы $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma$, такие, что $\neg \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \in \mathcal{L}$. В противном случае, Γ $\mathcal{L}$-непротиворечиво.

Определение

Множество Γ максимально непротиворечиво, если (следующие условия эквивалентны):

1. *Для любого максимально непротиворечивого Σ, если $\Gamma \subseteq \Sigma$, то $\Gamma = \Sigma$.*
2. *Для любой формулы ϕ, либо $\phi \in \Gamma$, либо $\neg\phi \in \Gamma$*

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

$\square$

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво и* ϕ *— это формула, тогда либо* $\Gamma \cup \{\phi\}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво, либо* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво.*

$\square$

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво и* ϕ *— это формула, тогда либо* $\Gamma \cup \{\phi\}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво, либо* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво.*

Proof.

Предположим, что оба множества $\mathcal{L}$-противоречивы.

$\square$

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

Лемма

Пусть Γ *$\mathcal{L}$-непротиворечиво и* ϕ *— это формула, тогда либо* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *$\mathcal{L}$-непротиворечиво, либо* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ $\mathcal{L}$ *$\mathcal{L}$-непротиворечиво.*

Proof.

Предположим, что оба множества $\mathcal{L}$-противоречивы. Тогда найдутся $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi \in \Gamma \cup \{\phi\}$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m, \neg\phi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$.

□

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво и* ϕ *— это формула, тогда либо* $\Gamma \cup \{\phi\}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво, либо* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво.*

Proof.

Предположим, что оба множества $\mathcal{L}$-противоречивы. Тогда найдутся $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi \in \Gamma \cup \{\phi\}$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m, \neg\phi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$. Рассмотрим формулу $A = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \phi_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{m} \psi_j$.

$\square$

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво и* ϕ *— это формула, тогда либо* $\Gamma \cup \{\phi\}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво, либо* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво.*

Proof.

Предположим, что оба множества $\mathcal{L}$-противоречивы. Тогда найдутся $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \in \Gamma \cup \{\phi\}$ и $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\phi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$. Рассмотрим формулу $A = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \phi_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{m} \psi_j$. Тогда $\mathcal{L} \vdash \neg(A \wedge \phi)$ и $\mathcal{L} \vdash \neg(A \wedge \neg\phi)$. Тогда $\mathcal{L} \vdash \neg A$.

$\square$

Лемма о пополнении непротиворечивого множества

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво и* ϕ *— это формула, тогда либо* $\Gamma \cup \{\phi\}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво, либо* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво.*

Proof.

Предположим, что оба множества $\mathcal{L}$-противоречивы. Тогда найдутся $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \in \Gamma \cup \{\phi\}$ и $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\phi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$. Рассмотрим формулу $A = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \phi_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{m} \psi_j$. Тогда $\mathcal{L} \vdash \neg(A \wedge \phi)$ и $\mathcal{L} \vdash \neg(A \wedge \neg\phi)$. Тогда $\mathcal{L} \vdash \neg A$. Противоречие, так как Γ непротиворечиво. $\square$

Лемма Линденбаума

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$*-непротиворечиво, тогда найдется максимально непротиворечивое множество* Σ*, такое, что* $\Gamma \subseteq \Sigma$*.*

$\square$

Лемма Линденбаума

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$-непротиворечиво, тогда найдется максимально непротиворечивое множество Σ, такое, что $\Gamma \subseteq \Sigma$.

Proof.

Пусть $\phi_1, \phi_2, \ldots$ все формулы. Определим индукцией следующее семейство множеств:

$\square$

Лемма Линденбаума

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$-непротиворечиво, тогда найдется максимально непротиворечивое множество Σ, такое, что $\Gamma \subseteq \Sigma$.

Proof.

Пусть $\phi_1, \phi_2, \ldots$ все формулы. Определим индукцией следующее семейство множеств:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \Gamma \\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}, \text{если } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \ \mathcal{L}\text{-непротиворечиво} \\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\phi_n\}, \text{иначе} \end{cases}.$$

$\square$

Лемма Линденбаума

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$-непротиворечиво, тогда найдется максимально непротиворечивое множество Σ, такое, что $\Gamma \subseteq \Sigma$.

Proof.

Пусть $\phi_1, \phi_2, \ldots$ все формулы. Определим индукцией следующее семейство множеств:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \Gamma \\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}, \text{если } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \ \mathcal{L}\text{-непротиворечиво} \\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\phi_n\}, \text{иначе} \end{cases}.$$

По лемме о пополнении, каждое Γ_n $\mathcal{L}$-непротиворечиво. Положим $\Delta = \cup_{n=0}^{\infty}\Gamma_n$.

□

Лемма Линденбаума

Лемма

Пусть Γ $\mathcal{L}$-непротиворечиво, тогда найдется максимально непротиворечивое множество Σ, такое, что $\Gamma \subseteq \Sigma$.

Proof.

Пусть $\phi_1, \phi_2, \dots$ все формулы. Определим индукцией следующее семейство множеств:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \Gamma \\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}, \text{если } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \ \mathcal{L}\text{-непротиворечиво} \\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\phi_n\}, \text{иначе} \end{cases}.$$

По лемме о пополнении, каждое Γ_n $\mathcal{L}$-непротиворечиво. Положим $\Delta = \cup_{n=0}^{\infty}\Gamma_n$. Для каждого n, либо $\phi_n \in \Gamma_{n+1}$, либо $\neg\phi_n \in \Gamma_{n+1}$, а значит, и в Δ. Тогда Δ максимально и непротиворечиво. $\square$

Лемма о максимально непротиворечивых множествах

Лемма

Пусть Γ *максимальное* $\mathcal{L}$*-непротиворечивое множество, тогда:*

- $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$
- $\neg\phi \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$
- $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$
- $\phi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$

$\square$

Лемма о максимально непротиворечивых множествах

Лемма

Пусть Γ *максимальное* $\mathcal{L}$*-непротиворечивое множество, тогда:*

- $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$
- $\neg\phi \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$
- $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$
- $\phi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$

Разберем для примера пункт 4.

$\square$

Лемма о максимально непротиворечивых множествах

Лемма

Пусть Γ *максимальное* $\mathcal{L}$*-непротиворечивое множество, тогда:*

- $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$
- $\neg\phi \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$
- $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$
- $\phi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$

Разберем для примера пункт 4.

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть $\phi \vee \psi \in \Gamma$ и при этом $\phi \notin \Gamma$ и $\psi \notin \Gamma$. Тогда $\neg\phi \in \Gamma$ и $\neg\psi \in \Gamma$. Тогда Γ противоречиво, ибо $\neg((\neg\phi \wedge \neg\psi) \wedge (\phi \vee \psi)) \in \mathcal{L}$, что тавтология, и при этом $(\neg\phi \wedge \neg\psi) \wedge (\phi \vee \psi) \in \Gamma$. $\square$

Лемма о максимально непротиворечивых множествах

Лемма

Пусть Γ *максимальное* $\mathcal{L}$*-непротиворечивое множество, тогда:*

- $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$
- $\neg\phi \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$
- $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$
- $\phi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$

Разберем для примера пункт 4.

Proof.

$\square$

Лемма о максимально непротиворечивых множествах

Лемма

Пусть Γ *максимальное* $\mathcal{L}$*-непротиворечивое множество, тогда:*

- $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$
- $\neg\phi \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$
- $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$
- $\phi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$

Разберем для примера пункт 4.

Proof.

($\Leftarrow$) Пусть $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$, при этом $\phi \vee \psi \notin \Gamma$. Тогда $\neg(\phi \vee \psi) \in \Gamma$. Откуда $\phi \wedge \neg(\phi \vee \psi) \in \Gamma$. С другой стороны, $\neg(\phi \wedge \neg(\phi \vee \psi)) \in \mathcal{L}$, будучи тавтологией. $\square$

Каноническая шкала и каноническая модель

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика.

Каноническая шкала и каноническая модель

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика. Канонической шкалой логики $\mathcal{L}$ называется шкала $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

Каноническая шкала и каноническая модель

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика. Канонической шкалой логики $\mathcal{L}$ называется шкала $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

- *$W_{\mathcal{L}}$ — это множество всех максимальных $\mathcal{L}$-непротиворечивых множеств.*

Каноническая шкала и каноническая модель

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика. Каноничеcкой шкалой логики $\mathcal{L}$ называется шкала $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

- *$W_{\mathcal{L}}$ — это множество всех максимальных $\mathcal{L}$-непротиворечивых множеств.*
- $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Leftrightarrow_{def} \forall \phi \ \Box \phi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Delta$

Каноническая шкала и каноническая модель

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика. Канонической шкалой логики $\mathcal{L}$ называется шкала $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

- $W_{\mathcal{L}}$ *— это множество всех максимальных $\mathcal{L}$-непротиворечивых множеств.*
- $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Leftrightarrow_{def} \forall \phi \ \Box \phi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Delta$

Определение

Каноническая модель — это модель $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \vartheta_{\mathcal{L}} \rangle$, где $\vartheta_{\mathcal{L}}$ — это каноническая оценка, заданная как

$$\vartheta_{\mathcal{L}}(p) =_{def} \{\Gamma \in W_{\mathcal{L}} \mid p \in \Gamma\}$$

Лемма о канонической модели

Лемма

Для любого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

$\square$

Лемма о канонической модели

Лемма

Для любого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Box\psi$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

Для любого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Box\psi$

Proof.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \Box\psi \Leftrightarrow$$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

Для любого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

Рассмотрим случай, когда $\phi \leftrightharpoons \Box\psi$

Proof.

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \Box\psi \Leftrightarrow$

По определению

$\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Delta \models \psi \Leftrightarrow$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

Для любого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Box\psi$

Proof.

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \Box\psi \Leftrightarrow$

По определению

$\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Delta \models \psi \Leftrightarrow$

По предположению индукции

$\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow$

$\square$

Лемма о канонической модели

Лемма

Для любого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Box\psi$

Proof.

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \Box\psi \Leftrightarrow$

По определению

$\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Delta \models \psi \Leftrightarrow$

По предположению индукции

$\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow$

Это надо доказать

$\Box\psi \in \Gamma$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

$\square$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box \psi \in \Gamma$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box \psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$.

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}}\ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$. Покажем $(\Rightarrow)$.

$\square$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$. Покажем $(\Rightarrow)$.
Пусть $\Box\psi \notin \Gamma$.

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$. Покажем $(\Rightarrow)$.
Пусть $\Box\psi \notin \Gamma$. Построим Θ, такое, что $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Theta$ и $\psi \notin \Theta$. Положим $\Psi = \{\theta \mid \Box\theta \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$.

□

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}}\ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$. Покажем $(\Rightarrow)$.
Пусть $\Box\psi \notin \Gamma$. Построим Θ, такое, что $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Theta$ и $\psi \notin \Theta$. Положим $\Psi = \{\theta \mid \Box\theta \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$. Покажем, что Ψ непротиворечиво.

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$. Покажем $(\Rightarrow)$.
Пусть $\Box\psi \notin \Gamma$. Построим Θ, такое, что $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Theta$ и $\psi \notin \Theta$. Положим $\Psi = \{\theta \mid \Box\theta \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$. Покажем, что Ψ непротиворечиво. Предположим противное.

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}}\ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$(\Leftarrow)$ следует из определения $R_{\mathcal{L}}$. Покажем $(\Rightarrow)$.
Пусть $\Box\psi \notin \Gamma$. Построим Θ, такое, что $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Theta$ и $\psi \notin \Theta$. Положим $\Psi = \{\theta \mid \Box\theta \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$. Покажем, что Ψ непротиворечиво. Предположим противное. Тогда существуют $\theta_1, \dots, \theta_n$, такие что $\neg(\wedge_{i=1}^{n} \theta_i \wedge \neg\psi) \in \mathcal{L}$, где θ_i такие, что $\Box\theta_i \in \Gamma$.

$\square$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Показжем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$$\mathcal{L} \vdash \neg(\wedge_{i=1}^{n} \theta_i \wedge \neg\psi)$$

□

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \;\; \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$\mathcal{L} \vdash \neg(\wedge_{i=1}^{n} \theta_i \wedge \neg\psi)$

Эквивалентность из классической логики

$\mathcal{L} \vdash \wedge_{i=1}^{n} \theta_i \rightarrow \psi$

$\square$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}} \ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$\mathcal{L} \vdash \neg(\wedge_{i=1}^{n} \theta_i \wedge \neg\psi)$

Эквивалентность из классической логики

$\mathcal{L} \vdash \wedge_{i=1}^{n} \theta_i \to \psi$

Nec + **MP** + пример вывода в **K**

$\mathcal{L} \vdash \wedge_{i=1}^{n} \Box\theta_i \to \Box\psi$

$\Box$

Лемма о канонической модели

Лемма

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$

Покажем, что $\forall \Delta \in W_{\mathcal{L}}\ \Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma$

Proof.

$\mathcal{L} \vdash \neg(\wedge_{i=1}^{n} \theta_i \wedge \neg\psi)$

Эквивалентность из классической логики

$\mathcal{L} \vdash \wedge_{i=1}^{n} \theta_i \to \psi$

Nec + **MP** + пример вывода в **K**

$\mathcal{L} \vdash \wedge_{i=1}^{n} \Box\theta_i \to \Box\psi$

Ясно, что $\wedge_{i=1}^{n} \Box\theta_i \to \Box\psi \in \Gamma$, так как $\wedge_{i=1}^{n} \Box\theta_i \in \Gamma$ по лемме о максимальных непротиворечивых множествах. Тогда $\Box\psi \in \Gamma$. Противоречие. $\Box$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

$\square$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Proof.

1. $(\Rightarrow)$ Если $\phi \in \mathcal{L}$, тогда для каждого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$.

$\square$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Proof.

1. $(\Rightarrow)$ Если $\phi \in \mathcal{L}$, тогда для каждого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$.
2. $(\Leftarrow)$ Пусть $\phi \notin \mathcal{L}$, тогда $\{\neg\phi\}$ непротиворечиво.

$\square$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Proof.

1. ($\Rightarrow$) Если $\phi \in \mathcal{L}$, тогда для каждого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$.
2. ($\Leftarrow$) Пусть $\phi \notin \mathcal{L}$, тогда $\{\neg\phi\}$ непротиворечиво. Тогда, по лемме Линденбаума, найдется максимальное $\mathcal{L}$-непротиворечивое множество Γ, что $\{\neg\phi\} \subseteq \Gamma$.

$\square$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Proof.

1. ($\Rightarrow$) Если $\phi \in \mathcal{L}$, тогда для каждого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$.
2. ($\Leftarrow$) Пусть $\phi \notin \mathcal{L}$, тогда $\{\neg\phi\}$ непротиворечиво. Тогда, по лемме Линденбаума, найдется максимальное $\mathcal{L}$-непротиворечивое множество Γ, что $\{\neg\phi\} \subseteq \Gamma$. Тогда $\neg\phi \in \Gamma$.

$\square$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Proof.

1. ($\Rightarrow$) Если $\phi \in \mathcal{L}$, тогда для каждого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$.
2. ($\Leftarrow$) Пусть $\phi \notin \mathcal{L}$, тогда $\{\neg\phi\}$ непротиворечиво. Тогда, по лемме Линденбаума, найдется максимальное $\mathcal{L}$-непротиворечивое множество Γ, что $\{\neg\phi\} \subseteq \Gamma$. Тогда $\neg\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \neg\phi$.

$\square$

Теорема о канонической модели

Теорема

$\phi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$

Proof.

1. $(\Rightarrow)$ Если $\phi \in \mathcal{L}$, тогда для каждого максимального $\mathcal{L}$-непротиворечивого Γ, $\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \phi$.
2. $(\Leftarrow)$ Пусть $\phi \notin \mathcal{L}$, тогда $\{\neg\phi\}$ непротиворечиво. Тогда, по лемме Линденбаума, найдется максимальное $\mathcal{L}$-непротиворечивое множество Γ, что $\{\neg\phi\} \subseteq \Gamma$. Тогда $\neg\phi \in \Gamma$. По лемме о канонической модели, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \neg\phi$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \not\models \phi$.

$\square$

Полнота системы K

Следствие

$\mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{L}$

$\square$

Полнота системы K

Следствие

$\mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{L}$

Теорема

$\mathbf{K} = \mathrm{Log}(\mathcal{F})$, *где* $\mathcal{F}$ *— это класс всех шкал Крипке.*

$\square$

Полнота системы K

Следствие

$\mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{L}$

Теорема

$\mathsf{K} = \mathrm{Log}(\mathcal{F})$, *где* $\mathcal{F}$ *— это класс всех шкал Крипке.*

Proof.

Рассмотрим следующую цепочку включений:

$\mathsf{K} \subseteq \mathrm{Log}(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathsf{K}}) \subseteq \mathsf{K}$

$\square$

Полнота системы $\mathbf{K}$

Следствие

$\mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{L}$

Теорема

$\mathbf{K} = \mathrm{Log}(\mathcal{F})$, *где* $\mathcal{F}$ *— это класс всех шкал Крипке.*

Proof.

Рассмотрим следующую цепочку включений:

$\mathbf{K} \subseteq \mathrm{Log}(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathbf{K}}) \subseteq \mathbf{K}$

Первое включение — это теорема корректности; второе включение следует из определения логики класса шкал; третье включение — это следствие выше. $\square$

На следующей лекции мы

1. Рассмотрим примеры модальных формул, охарактеризуем соответствующие им свойства шкал и опишем стандартный "зоопарк" модальных логик: системы **T**, **K4**, **S**4, **S**5, **D**, **GL** и так далее.

На следующей лекции мы

1. Рассмотрим примеры модальных формул, охарактеризуем соответствующие им свойства шкал и опишем стандартный "зоопарк" модальных логик: системы **T**, **K4**, **S**4, **S**5, **D**, **GL** и так далее.
2. Дадим понятие канонической логики и рассмотрим примеры канонических логик.

На следующей лекции мы

1. Рассмотрим примеры модальных формул, охарактеризуем соответствующие им свойства шкал и опишем стандартный "зоопарк" модальных логик: системы **T**, **K4**, **S**4, **S**5, **D**, **GL** и так далее.
2. Дадим понятие канонической логики и рассмотрим примеры канонических логик.
3. Обсудим подробнее логику Гёделя-Лёба **GL**, ее связь с теорией доказательств, ее неканоничность и покажем, что она полна по Крипке.