Системы типизации лямбда-исчисления

Лекция 4. Просто типизированное лямбда-исчисление

Денис Москвин

06.03.2011

CS Club при ПОМИ РАН

Предварительные замечания (1)

Типы представляют собой объекты синтаксической природы и могут быть присвоены лямбда-термам.

Если M — терм и тип α присвоен M, то пишут

$$M : \alpha$$

Например, в большинстве систем $\mathbf{I} : \alpha \to \alpha$, то есть тождественной функции может быть приписан тип $\alpha \to \alpha$. Если x, являющийся аргументом функции $\mathbf{I}$, имеет тип α, то значение $\mathbf{I}\,x$ тоже имеет тип α.

В общем случае $\alpha \to \beta$ является типом функции из α в β.

Предварительные замечания (2)

Есть два семейства систем типов.

Системы в стиле Карри: Термы те же, что и в бестиповой теории. Каждый терм обладает множеством различных типов (пустое, одно- или многоэлементное, бесконечное).

Системы в стиле Чёрча: Термы — аннотированные версии бестиповых термов. Каждый терм имеет тип (обычно уникальный), выводимый из способа, которым терм аннотирован.

Иногда используют такую терминологию:

Системы в стиле Карри — лямбда-исчисление *с присваиванием типов*.

Системы в стиле Чёрча — системы *типизированного* лямбда-исчисления.

Предварительные замечания (3)

Програмистский подход: термы интерпретируются как программы, а типы — как их частичные спецификации.

Системы в стиле Карри: неявная типизация (например, Haskell, Ocaml).

Системы в стиле Чёрча: явная типизация (большинство типизированных языков).

Логический подход: типы интерпретируются как высказывания, а термы — как их доказательства.

Типы системы $\lambda\!\!\to$ (1)

Самая простая система — это ***просто типизированное* λ*-исчисление*** ($\lambda\!\!\to$ или Simple Type Theory (STT)).

Множество типов $\mathbb{T}$ системы $\lambda\!\!\to$ определяется индуктивно:

$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{T}$ (переменные типа)

$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow (\sigma \to \tau) \in \mathbb{T}$ (типы пространства функций)

В абстрактном синтаксисе:

$$\mathbb{T} \ ::= \ \mathbb{V} \mid \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

Здесь $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.

Соглашение: α, β, γ используем для типовых переменных, а σ, τ, ρ — для произвольных типов.

Типы системы $\lambda\!\to$ (2)

Стрелка правоассоциативна: если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{T}$, то

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \;\equiv\; (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \ldots \to (\sigma_{n-1} \to \sigma_n) \ldots))$$

Примеры типов

$$\begin{array}{rcl}
(\alpha \to \beta) & \equiv & \alpha \to \beta \\
(\alpha \to (\beta \to \gamma)) & \equiv & \alpha \to \beta \to \gamma \\
((\alpha \to \beta) \to \gamma) & \equiv & (\alpha \to \beta) \to \gamma \\
((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) & \equiv & (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma \\
((\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta)) & \equiv & (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta
\end{array}$$

Всякий тип в $\lambda\!\to$ может быть записан в виде

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$$

Как типизировать термы? (1)

Если терм ***переменная*** — как угодно:
$x{:}\alpha$, $y{:}\alpha \to \beta$, $z{:}(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta$.

Если терм ***аппликация*** $M\,N$, то

- ▶ M должно быть функцией, то есть иметь стрелочный тип $M{:}\sigma \to \tau$;
- ▶ N должно быть «подходящим» аргументом, то есть иметь тип $N{:}\sigma$;
- ▶ вся аппликация должна иметь тип результата применения функции: $(M\,N){:}\tau$.

Например, для $x{:}\alpha$, $y{:}\alpha \to \beta$ имеем $(y\,x){:}\beta$.
Добавив $z{:}\beta \to \gamma$, получим $z\,(y\,x){:}\gamma$.
А какие должны иметь типы x и y, чтобы $x\,(y\,x){:}\beta$?

Как типизировать термы? (2)

Если терм ***абстракция*** $\lambda x.\, M$, то тип должен быть стрелочным $(\lambda x.\, M) : \sigma \to \tau$, причём тип аргумента $x : \sigma$ и тип тела абстракции $M{:}\tau$.

Например, для $x{:}\alpha$ имеем $(\lambda x.\, x){:}\alpha \to \alpha$.

А надо ли здесь отдельно указывать, что $x{:}\alpha$?
Если не указать, то допустимо и $(\lambda x.\, x) : \beta \to \beta$ и даже $(\lambda x.\, x) : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ — стиль Карри.
Если указать $(\lambda x : \alpha.\, x) : \alpha \to \alpha$, то тип терма определяется однозначно — стиль Чёрча.

Типизируйте по Чёрчу: $\lambda x{:}?.\, \lambda y{:}?.\, x\,(y\,x){:}?$

Как типизировать термы? (3)

Правила ассоциативности для типов (вправо), аппликации (влево) и абстракции (вправо) хорошо согласованы друг с другом:

$$F : \alpha \to (\beta \to (\gamma \to \delta)) \qquad (M : \alpha,\ N : \beta,\ P : \gamma)$$

$$(F\,M) : \beta \to (\gamma \to \delta)$$

$$((F\,M)\ N) : \gamma \to \delta$$

$$(((F\,M)\ N)\ P) : \delta$$

$$Q : \rho$$

$$(\lambda y : \tau.\ Q) : \tau \to \rho$$

$$(\lambda x : \sigma.\ (\lambda y : \tau.\ Q)) : \sigma \to (\tau \to \rho)$$

Зелёные скобки опускаются.

Предтермы системы $\lambda\!\rightarrow$ а ля Карри

Множество ***предтермов*** (или ***псевдотермов***) Λ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \in \Lambda \end{array}$$

В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \ ::= \ V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\, \Lambda)$$

То есть предтермы — это термы бестипового λ-исчисления.

Предермы системы $\lambda{\rightarrow}$ а ля Чёрч

Множество ***предтермов*** $\Lambda_{\mathbb{T}}$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \dots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M, N \in \Lambda_{\mathbb{T}} & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M \in \Lambda_{\mathbb{T}}, x \in V, \sigma \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x{:}\sigma.\, M) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \end{array}$$

В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_{\mathbb{T}} \ ::= \ V \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\,\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V{:}\mathbb{T}.\, \Lambda_{\mathbb{T}})$$

Все соглашения о скобках и ассоциативности те же, что в Λ.

Примеры предтермов

Система $\lambda\!\rightarrow$ а ля Карри:

$$\lambda x\, y.\, x$$
$$\lambda f\, g\, x.\, f\, (g\, x)$$
$$\lambda x.\, x\, x$$

Система $\lambda\!\rightarrow$ а ля Чёрч:

$$\lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x \;\equiv\; \lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x$$
$$\lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\alpha.\, x \;\equiv\; \lambda x^{\alpha}\, y^{\alpha}.\, x$$
$$\lambda f{:}\alpha.\, \lambda g{:}\beta.\, \lambda x{:}\gamma.\, f\, (g\, x) \;\equiv\; \lambda f^{\alpha}\, g^{\beta}\, x^{\gamma}.\, f\, (g\, x)$$
$$\lambda f{:}(\beta \rightarrow \gamma).\, \lambda g{:}(\alpha \rightarrow \beta).\, \lambda x{:}\alpha.\, f\, (g\, x) \;\equiv\; \lambda f^{\beta\rightarrow\gamma}\, g^{\alpha\rightarrow\beta}\, x^{\alpha}.\, f\, (g\, x)$$
$$\lambda x{:}\alpha.\, x\, x \;\equiv\; \lambda x^{\alpha}.\, x\, x$$

Утверждение о типизации

Утверждение (о типизации) в $\lambda\!\to$ «а ля Карри» имеет вид

$$M : \tau$$

где $M \in \Lambda$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Тип τ иногда называют ***предикатом***, а терм M — ***субъектом*** утверждения.

$$(\lambda x.\, x) : \alpha \to \alpha \qquad (\lambda x.\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \qquad (\lambda x\, y.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$$

Для $\lambda\!\to$ «а ля Чёрч» надо лишь заменить Λ на $\Lambda_{\mathbb{T}}$

$$(\lambda x{:}\alpha.\, x) : \alpha \to \alpha \qquad (\lambda x^{\alpha\to\beta}.\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \qquad (\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$$

Объявления

Объявление — это утверждение (о типизации) с термовой переменной в качестве субъекта.

$$x : \alpha$$

$$y : \beta$$

$$f : \alpha \to \beta$$

$$g : (\alpha \to \beta) \to \gamma$$

Контексты

Контекст — это множество объявлений с *различными* переменными в качестве субъекта.

$$\Gamma = \{x_1{:}\sigma_1, x_2{:}\sigma_2, \ldots, x_n{:}\sigma_n\}$$

(контекст иногда называют базисом или окружением)
Фигурные скобки множества иногда опускают:

$$\Gamma = x{:}\alpha, y{:}\beta, f{:}\alpha\to\beta, g{:}(\alpha\to\beta)\to\gamma$$

Контексты можно ***расширять***, добавляя объявление *новой* переменной:

$$\Delta = \Gamma, z{:}\alpha\to\gamma = x{:}\alpha, y{:}\beta, f{:}\alpha\to\beta, g{:}(\alpha\to\beta)\to\gamma, z{:}\alpha\to\gamma$$

Контекст можно рассматривать как (частичную) функцию из множества переменных V в множество типов $\mathbb{T}$.

Правила типизации $\lambda{\to}$ «а ля Карри»

Утверждение $M : \tau$ называется ***выводимым*** в контексте Γ, обозначение

$$\Gamma \vdash M{:}\tau$$

если его вывод может быть произведен по правилам:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (x{:}\sigma) \in \Gamma & \Rightarrow & \Gamma \vdash x{:}\sigma \\[2em] \Gamma \vdash M{:}\sigma{\to}\tau, \Gamma \vdash N{:}\sigma & \Rightarrow & \Gamma \vdash (M\,N){:}\tau \\[2em] \Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau & \Rightarrow & \Gamma \vdash (\lambda x.\,M){:}\sigma{\to}\tau \end{array}}$$

Если существуют Γ и τ, такие что $\Gamma \vdash M{:}\tau$, то предтерм M называют (допустимым) термом.

Правила типизации $\lambda\!\to$ «а ля Карри» (2)

(аксиома)	$\Gamma \vdash x\!:\!\sigma$, если $(x\!:\!\sigma) \in \Gamma$
(удаление $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M\!:\!\sigma\!\to\!\tau \quad \Gamma \vdash N\!:\!\sigma}{\Gamma \vdash (M\,N)\!:\!\tau}$
(введение $\to$)	$\dfrac{\Gamma, x\!:\!\sigma \vdash M\!:\!\tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.\, M)\!:\!\sigma\!\to\!\tau}$

Пример дерева вывода типа для $\lambda x\,y.\,x$

$$\dfrac{\dfrac{x\!:\!\alpha, y\!:\!\beta \vdash x\!:\!\alpha}{x\!:\!\alpha \vdash (\lambda y.\,x)\!:\!\beta\!\to\!\alpha}}{\vdash (\lambda x\,y.\,x)\!:\!\alpha\!\to\!\beta\!\to\!\alpha}$$

То есть для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ верно $\vdash (\lambda x\,y.\,x)\!:\!\alpha\!\to\!\beta\!\to\!\alpha$.

Правила типизации $\lambda_{\rightarrow}$ «а ля Чёрч»

(аксиома)	$\Gamma \vdash x:\sigma$, если $(x:\sigma) \in \Gamma$
(удаление $\rightarrow$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma\rightarrow\tau \quad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash (M\,N):\tau}$
(введение $\rightarrow$)	$\dfrac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash (\lambda x:\sigma.\, M):\sigma\rightarrow\tau}$

Вывод типа для $\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x$ проще

$$\dfrac{\dfrac{x:\alpha, y:\beta \vdash x:\alpha}{x:\alpha \vdash (\lambda y:\beta.\, x):\beta\rightarrow\alpha}}{\vdash (\lambda x:\alpha.\, \lambda y:\beta.\, x):\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha}$$

То есть для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ верно $\vdash (\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x):\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$.

Правила для $\lambda{\to}$ «а ля Карри»: естественный вывод

Правила типизации в терминах естественного вывода (отбрасываемые допущения зачёркиваются):

Правило удаления $\to$	Правило введения $\to$
$\dfrac{M : \sigma \to \tau \quad N : \sigma}{(M\,N) : \tau}$	$\dfrac{\begin{array}{c}[x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau\end{array}}{(\lambda x.\, M) : \sigma \to \tau}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : \alpha]^2 \quad [y : \beta]^1}{x : \alpha}}{(\lambda y.\, x) : \beta \to \alpha}\,1}{(\lambda x\, y.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha}\,2$$

Правила для $\lambda_\to$ «а ля Чёрч»: естественный вывод

Правила типизации в терминах естественного вывода (отбрасываемые допущения зачёркиваются):

Правило удаления $\to$	Правило введения $\to$
$\dfrac{M : \sigma \to \tau \quad N : \sigma}{(M\,N) : \tau}$	$\dfrac{\begin{array}{c}[x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau\end{array}}{(\lambda x : \sigma .\, M) : \sigma \to \tau}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : \alpha]^2 \quad [y : \beta]^1}{x : \alpha}}{(\lambda y : \beta .\, x) : \beta \to \alpha}\,1}{(\lambda x : \alpha .\, \lambda y : \beta .\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha}\,2$$

Типизируем $\lambda f\, g\, x.\, g\,(f\, x)$ и $\mathbf{S} = \lambda x\, y\, z.\, x\, z\,(y\, z)$ а ля Карри

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[g:\beta\to\gamma]^2 \qquad \dfrac{[f:\alpha\to\beta]^3 \qquad [x:\alpha]^1}{f\,x:\beta}}{g\,(f\,x):\gamma}}{\lambda x.\, g\,(f\,x):\alpha\to\gamma}\,1}{\lambda g\, x.\, g\,(f\,x):(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}\,2
$$

$$
\dfrac{\lambda g\, x.\, g\,(f\,x):(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}{\lambda f\, g\, x.\, g\,(f\,x):(\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}\,3
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:\alpha\to\beta\to\gamma]^3 \qquad [z:\alpha]^1}{x\,z:\beta\to\gamma} \qquad \dfrac{[y:\alpha\to\beta]^2 \qquad [z:\alpha]^1}{y\,z:\beta}}{x\,z\,(y\,z):\gamma}}{\lambda z.\, x\,z\,(y\,z):\alpha\to\gamma}\,1}{\lambda y\, z.\, x\,z\,(y\,z):(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,2
$$

$$
\dfrac{\lambda y\, z.\, x\,z\,(y\,z):(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}{\lambda x\, y\, z.\, x\,z\,(y\,z):(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,3
$$

Типизируем $\lambda f\, g\, x.\, g\,(f\, x)$ и $\mathbf{S} = \lambda x\, y\, z.\, x\, z\,(y\, z)$ а ля Чёрч

$$\dfrac{\dfrac{[g : \beta \to \gamma]^2 \qquad \dfrac{[f : \alpha \to \beta]^3 \qquad [x : \alpha]^1}{f\, x : \beta}}{\dfrac{g\,(f\, x) : \gamma}{\dfrac{\lambda x : \alpha.\ g\,(f\, x) : \alpha \to \gamma}{\dfrac{\lambda g : \beta \to \gamma.\ \lambda x : \alpha.\ g\,(f\, x) : (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma}{\lambda f : \alpha \to \beta.\ \lambda g : \beta \to \gamma.\ \lambda x : \alpha.\ g\,(f\, x) : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma}3}2}1}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : \alpha \to \beta \to \gamma]^3 \qquad [z : \alpha]^1}{x\, z : \beta \to \gamma} \qquad \dfrac{[y : \alpha \to \beta]^2 \qquad [z : \alpha]^1}{y\, z : \beta}}{x\, z\,(y\, z) : \gamma}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\, z\,(y\, z) : \gamma}{\lambda z : \alpha.\ x\, z\,(y\, z) : \alpha \to \gamma}1}{\lambda y : \alpha \to \beta.\ \lambda z : \alpha.\ x\, z\,(y\, z) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}2}{\lambda x : \alpha \to \beta \to \gamma.\ \lambda y : \alpha \to \beta.\ \lambda z : \alpha.\ x\, z\,(y\, z) : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}3$$

Примеры: стираем термы

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\beta\to\gamma]^2 \qquad \dfrac{[\alpha\to\beta]^3 \qquad [\alpha]^1}{\beta}}{\gamma}}{\alpha\to\gamma}\,1}{(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}\,2}{(\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}\,3
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha\to\beta\to\gamma]^3 \qquad [\alpha]^1}{\beta\to\gamma} \qquad \dfrac{[\alpha\to\beta]^2 \qquad [\alpha]^1}{\beta}}{\gamma}}{\alpha\to\gamma}\,1}{(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,2}{(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,3
$$

Что вышло?

Деревья вывода в системе минимальной пропозициональной логики PROP! (слева — закон силлогизма)

Система минимальной пропозициональной логики

Система PROP состоит из:

- Импликационных утверждений, задаваемых следующим абстрактным синтаксисом: $\mathtt{Prop} ::= \mathtt{Var} \mid (\mathtt{Prop} \to \mathtt{Prop})$
- Правил вывода

Правило удаления $\to$	Правило введения $\to$
$\dfrac{\sigma \to \tau \qquad \sigma}{\tau}$	$\dfrac{\begin{matrix}[\sigma]^j \\ \vdots \\ \tau\end{matrix}}{\sigma \to \tau}\ j$

Здесь σ и τ — утверждения, σ в правиле введения — промежуточное (отбрасываемое на j-ом шаге).

Вывод утверждения σ из множества неотброшенных (существенных) допущений Δ обозначают $\Delta \vdash_{\mathrm{PROP}} \sigma$.

Соответствие Карри-Говарда

Имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между утверждениями в минимальной пропозициональной логики PROP и типизируемыми термами в $\lambda{\to}$.
Утверждение

$$x_1{:}\tau_1, \ldots, x_n{:}\tau_n \vdash_{\lambda\to} M{:}\sigma$$

может быть прочитано так: M есть доказательство σ, исходящее из предположений $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Подробнее [ITT 3.3]

Домашнее задание

Сконструируйте терм типа

- $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\delta \to \beta) \to \delta \to \gamma$
- $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha) \to (\alpha \to \beta) \to \delta \to \gamma \to \beta$ (2 штуки)
- $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha$
- $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \beta$

Добавьте типы в λ-абстракцию и постройте дерево естественного вывода типа для терма

$\lambda x.\, \lambda y.\, y\, (\lambda z.\, y\, x) : (\gamma \to \epsilon) \to ((\gamma \to \epsilon) \to \epsilon) \to \epsilon$

Литература (1)

LCWT гл. 3
Henk Barendregt, Lambda calculi with types,
Handbook of logic in computer science (vol. 2), Oxford University Press, 1993

ITT гл. 3
Herman Geuvers, Introduction to Type Theory
Alfa Lernet Summer school 2008, Uruguay
http://www.cs.ru.nl/H.Geuvers/Uruguay2008SummerSchool.html/

Литература (2)

TAPL гл. 9
Benjamin C. Pierce, Types and Programming Languages, MIT Press, 2002
http://www.cis.upenn.edu/ bcpierce/tapl

I2FP гл. 4.1
John Harrison, Introduction to Functional Programming
http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/Lectures/funprog-jrh-1996/
русский перевод: http://code.google.com/p/funprog-ru/