Алгоритм Альфреда Тарского

Геометрия

Геометрия

- Задачи на вычисление

Геометрия

- Задачи на вычисление
- Задачи на построение

Геометрия

- Задачи на вычисление
- Задачи на построение
- Задачи на доказательство

Язык геометрии (планиметрии)

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l"

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l"
- "Точка A лежит на окружности O"

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l"
- "Точка A лежит на окружности O"
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D"

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l"
- "Точка A лежит на окружности O"
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D"
- ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l" , $\mathrm{OnLine}(A, l)$
- "Точка A лежит на окружности O"
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D"
- ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l" , $\mathrm{OnLine}(A, l)$
- "Точка A лежит на окружности O" , $\mathrm{OnCircle}(A, O)$
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D"
- ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- точки
- прямые
- окружности
- ...

Отношения:

- "Точка A лежит на прямой l" , $\mathrm{OnLine}(A, l)$
- "Точка A лежит на окружности O" , $\mathrm{OnCircle}(A, O)$
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D" , $\mathrm{EqDistance}(A, B, C, D)$
- ...

Язык геометрии (планиметрии):

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- "Для любых двух точек A и B существует прямая l, на которой обе эти точки лежат":

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- "Для любых двух точек A и B существует прямая l, на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists l \{\mathrm{OnLine}(A, l) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B, l)\}$$

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- "Для любых двух точек A и B существует прямая l, на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists l \{\mathrm{OnLine}(A, l) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B, l)\}$$

- "Если точки точки A и B различны и обе лежат на прямых l и m, то эти прямые совпадают":

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- "Для любых двух точек A и B существует прямая l, на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists l \{\mathrm{OnLine}(A, l) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B, l)\}$$

- "Если точки точки A и B различны и обе лежат на прямых l и m, то эти прямые совпадают":

$$\forall A \forall B \forall l \forall m \{A \neq B \,\&\, \mathrm{OnLine}(A, l) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B, l) \,\&\, \\ \&\, \mathrm{OnLine}(A, m) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B, m) \Rightarrow l = m\}$$

- ...

Теорема.

Каковы бы ни были три попарно различные точки A_1, A_2 и A_3, существуют точки B_1, B_2, B_3 и C и прямые l_1, l_2, l_3, m_1, m_2 и m_3 такие что

$$
\begin{gathered}
\mathrm{OnLine}(A_2, l_1) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_3, l_1) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B_1, l_1) \,\&\\
\&\, \mathrm{OnLine}(A_1, l_2) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_1, l_2) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B_2, l_2) \,\&\\
\&\, \mathrm{OnLine}(A_1, l_3) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_2, l_3) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B_3, l_3) \,\&\\
\&\, \mathrm{OnLine}(A_1, m_1) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B_1, m_1) \,\&\, \mathrm{OnLine}(C, m_1) \,\&\\
\&\, \mathrm{OnLine}(A_2, m_2) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B_2, m_2) \,\&\, \mathrm{OnLine}(C, m_2) \,\&\\
\&\, \mathrm{OnLine}(A_3, m_3) \,\&\, \mathrm{OnLine}(B_3, m_3) \,\&\, \mathrm{OnLine}(C, m_3) \,\&\\
\&\, \mathrm{EqDistance}(A_1, B_2, B_2, A_3) \,\&\\
\&\, \mathrm{EqDistance}(A_2, B_1, B_1, A_3) \,\&\\
\&\, \mathrm{EqDistance}(A_1, B_3, B_3, A_2)
\end{gathered}
$$

Язык геометрии (новая версия):

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой"

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой", $\mathrm{OnLine}(A, B, C)$

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой", $\mathrm{OnLine}(A, B, C)$
- "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C"

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой", $\mathrm{OnLine}(A, B, C)$
- "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C", $\mathrm{OnCircle}(A, B, C)$

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой", $\mathrm{OnLine}(A, B, C)$
- "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C", $\mathrm{OnCircle}(A, B, C)$
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D"

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- точки

Отношения:

- "Точки A, B и C лежат на одной прямой", $\mathrm{OnLine}(A, B, C)$
- "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C", $\mathrm{OnCircle}(A, B, C)$
- "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D", $\mathrm{EqDistance}(A, B, C, D)$
- ...

Теорема.

Каковы бы ни были точки A_1, A_2 и A_3, существуют точки B_1, B_2, B_3 и C такие, что

$$
\begin{gathered}
A_1 \neq A_2 \,\&\, A_1 \neq A_3 \,\&\, A_2 \neq A_3 \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathrm{OnLine}(A_1, A_2, B_3) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_2, A_3, B_1) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_1, A_3, B_2) \,\&\, \\
\&\, \mathrm{OnLine}(A_1, B_1, C) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_2, B_2, C) \,\&\, \mathrm{OnLine}(A_3, B_3, C) \,\&\, \\
\&\, \mathrm{EqDistance}(A_1, B_2, B_2, A_3) \,\&\, \\
\&\, \mathrm{EqDistance}(A_2, B_1, B_1, A_3) \,\&\, \\
\&\, \mathrm{EqDistance}(A_1, B_3, B_3, A_2)
\end{gathered}
$$

Теорема.

Каковы бы ни были числа $a_{1,x}$, $a_{1,y}$, $a_{2,x}$, $a_{2,y}$, $a_{3,x}$, $a_{3,y}$, существуют числа $b_{1,x}$, $b_{1,y}$, $b_{2,x}$, $b_{2,y}$, $b_{3,x}$, $b_{3,y}$, c_x и c_y такие, что

$$
\begin{gathered}
(a_{1,x} \neq a_{2,x} \vee a_{1,y} \neq a_{2,y}) \& (a_{1,x} \neq a_{3,x} \vee a_{1,y} \neq a_{3,y}) \& (a_{2,x} \neq a_{3,x} \vee a_{2,y} \neq a_3 \\
\Rightarrow \mathrm{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, a_{2,x}, a_{2,y}, b_{3,x}, b_{3,y}) \,\& \\
\& \,\mathrm{OnLine}(a_{2,x}, a_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}, b_{1,x}, b_{1,y}) \,\& \\
\& \,\mathrm{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, a_{3,x}, a_{3,y}, b_{2,x}, b_{2,y}) \,\& \\
\& \,\mathrm{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, c_x, c_y) \,\& \\
\& \,\mathrm{OnLine}(a_{2,x}, a_{2,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, c_x, c_y) \,\& \\
\& \,\mathrm{OnLine}(a_{3,x}, a_{3,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, c_x, c_y) \,\& \\
\& \,\mathrm{EqDistance}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}) \,\& \\
\& \,\mathrm{EqDistance}(a_{2,x}, a_{2,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, a_{3,x}, a_{3,y}) \,\& \\
\& \,\mathrm{EqDistance}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, a_{2,x}, a_{2,y})
\end{gathered}
$$

Немного алгебры

$$\mathrm{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y)$$

Немного алгебры

$$\mathrm{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) \iff$$
$$\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2$$

Немного алгебры

$$\mathrm{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) \iff \\ \iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2$$

$$\mathrm{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$$

Немного алгебры

$$\mathrm{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) \iff$$
$$\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2$$

$$\mathrm{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \iff a_x b_y + a_y c_x + b_x c_y - a_x c_y - a_y b_x - b_y c_x = 0$$

Теорема.

Каковы бы ни были числа $a_{1,x}$, $a_{1,y}$, $a_{2,x}$, $a_{2,y}$, $a_{3,x}$, $a_{3,y}$, существуют числа $b_{1,x}$, $b_{1,y}$, $b_{2,x}$, $b_{2,y}$, $b_{3,x}$, $b_{3,y}$, c_x и c_y такие, что

$$
\begin{gathered}
(a_{1,x} \neq a_{2,x} \vee a_{1,y} \neq a_{2,y}) \& (a_{1,x} \neq a_{3,x} \vee a_{1,y} \neq a_{3,y}) \& \\
\& (a_{2,x} \neq a_{3,x} \vee a_{2,y} \neq a_{3,y}) \Rightarrow \\
\Rightarrow a_{1,x}a_{2,y} + a_{1,y}b_{3,x} + a_{2,x}b_{3,y} - a_{1,x}b_{3,y} - a_{1,y}a_{2,x} - a_{2,y}b_{3,x} = 0 \,\& \\
\& \, a_{2,x}a_{3,y} + a_{2,y}b_{1,x} + a_{3,x}b_{1,y} - a_{2,x}b_{1,y} - a_{2,y}a_{3,x} - a_{3,y}b_{1,x} = 0 \,\& \\
\& \, a_{1,x}a_{3,y} + a_{1,y}b_{2,x} + a_{3,x}b_{2,y} - a_{1,x}b_{2,y} - a_{1,y}a_{3,x} - a_{3,y}b_{2,x} = 0 \,\& \\
\& \, a_{1,x}b_{1,y} + a_{1,y}c_x + b_{1,x}c_y - a_{1,x}c_y - a_{1,y}b_{1,x} - b_{1,y}c_x = 0 \,\& \\
\& \, a_{2,x}b_{2,y} + a_{2,y}c_x + b_{2,x}c_y - a_{2,x}c_y - a_{2,y}b_{2,x} - b_{2,y}c_x = 0 \,\& \\
\& \, a_{3,x}b_{3,y} + a_{3,y}c_x + b_{3,x}c_y - a_{3,x}c_y - a_{3,y}b_{3,x} - b_{3,y}c_x = 0 \,\& \\
\& \, (a_{1,x} - b_{2,x})^2 + (a_{1,y} - b_{2,y})^2 = (b_{2,x} - a_{3,x})^2 + (b_{2,y} - a_{3,y})^2 \,\& \\
\& \, (a_{2,x} - b_{1,x})^2 + (a_{2,y} - b_{1,y})^2 = (b_{1,x} - a_{3,x})^2 + (b_{1,y} - a_{3,y})^2 \,\& \\
\& \, (a_{1,x} - b_{3,x})^2 + (a_{1,y} - b_{3,y})^2 = (b_{3,x} - a_{2,x})^2 + (b_{3,y} - a_{2,y})^2
\end{gathered}
$$

Большая Советская Энциклопедия:

Большая Советская Энциклопедия:

Алгебра — один из больших разделов математики, принадлежащий наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы алгебры, отличающие ее от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, и в результате поиска общих приемов для решения однотипных арифметических задач. ...

Математический Энциклопедический Словарь:

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. *часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. ...*

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. *часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. ...*
2. *Алгебра над полем P, наз. также л и н е й н о й а л г е б р о й. Алгебра в этом смысле есть кольцо, в котором определено умножение элементов на на элементы из P, удовлетворяющее естественным аксиомам ...*

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. *часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. ...*
2. *Алгебра над полем P, наз. также л и н е й н о й а л г е б р о й. Алгебра в этом смысле есть кольцо, в котором определено умножение элементов на на элементы из P, удовлетворяющее естественным аксиомам ...*
3. *То же, что универсальная алгебра.*

??? ???? ???:

??? ???? ???:

Алгебра — это арифметика для лентяев

??? ???? ???:

Алгебра — это арифметика для лентяев

Алгебра — это геометрия для лентяев

Язык A

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел, 2,-3,5/7,-451/53,...

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел, $a, b, c, \ldots, a_1, b_2, x_6, \ldots$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения, с их помощью строятся *многочлены*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*:
  если P *и* Q *– многочлены, то* $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ *– элементарные формулы*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если $\dots$, то $\dots$") , с их помощью строятся *формулы*

Язык А

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* $\&$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ – *формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* $\&$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ – *формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*.

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Язык А

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ *– формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* $\&$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ *– формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ *при* $x = 4, y = 5$*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если …, то …") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ – *формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ *при* $x = 4, y = 5$*?*
Верно ли $(*)$ *при любых* x, y*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ – *формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ *при* $x = 4, y = 5$?
Верно ли $(*)$ *при любых* x, y?
Существуют ли x, y *такие, что выполнено* $(*)$?

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ *– формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами*.

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ *при* $x = 4, y = 5$*?*
Верно ли $(*)$ *при любых* x, y*?*
Существуют ли x, y *такие, что выполнено* $(*)$*?*
Верно ли, что для любого x *существует* y *такое, что выполнено* $(*)$*?*

Язык А

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...") , с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *и* Ψ – *формулы, то* $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \Longrightarrow \Psi)$ *также являются формулами.*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ *при* $x = 4, y = 5$*?*
Верно ли $(*)$ *при любых* x, y*?*
Существуют ли x, y *такие, что выполнено* $(*)$*?*
Верно ли, что для любого x *существует* y *такое, что выполнено* $(*)$*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

    если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ *при любых* x, y*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли $(*)$ при любых x, y?

$$\forall x \forall y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Существуют ли x, y *такие, что выполнено* $(*)$*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \mathbin{\&} xy = 3x + 2y \tag{$*$}$$

Существуют ли x, y *такие, что выполнено* $(*)$*?*

$$\exists x \exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \mathbin{\&} xy = 3x + 2y\}$$

Язык А

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли, что для любого x *существует* y *такое, что выполнено* $(*)$*?*

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

Верно ли, что для любого x существует y такое, что выполнено $(*)$*?*

$$\forall x \exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=, >, <$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:
  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \tag{$*$}$$

$$\forall x \exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

$$\forall x \{\exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \,\&\, \exists y \{xy = 3x + 2y\}\}$$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* $\&$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

$$\forall x \exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

$$\forall x \{\exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \,\&\, \exists y \{xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x \{\exists y \{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

Язык A

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")

- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся *формулы*:

  если Φ *– формула, а* α *– переменная, то* $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ *также являются формулами*

$$x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y \qquad (*)$$

$$\forall x \exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2 \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \,\&\, \exists y\{xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x-y)^2\} \,\&\, xy = 3x + 2y\}$$

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка A без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Жил примерно в 787-850

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Жил примерно в 787-850

"Китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-габр в'алмуккабалла"

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык А:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык А (упрощенный вариант):

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*

Язык А:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык А (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*:
  если P – многочлен, то $P = 0$, $P > 0$, $P < 0$ – элементарные формулы

Язык А:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык А (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*:
  если P – многочлен, то $P = 0$, $P > 0$, $P < 0$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")

Язык A:

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык A (упрощенный вариант):

- *обозначения* для всех рациональных чисел
- *переменные* для вещественных чисел
- *операции* сложения и умножения
- *отношения* $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся *элементарные формулы*:
  если P – многочлен, то $P = 0$, $P > 0$, $P < 0$ – элементарные формулы
- *логические связки* & ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\Longrightarrow$ ("если ..., то ...")
- *кванторы* $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка A без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка A без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Тривиальный случай – бескванторная формула

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка А без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Тривиальный случай – бескванторная формула

База индукции – однокванторная формула, $\exists x \Phi(x)$ или $\forall x \Phi(x)$

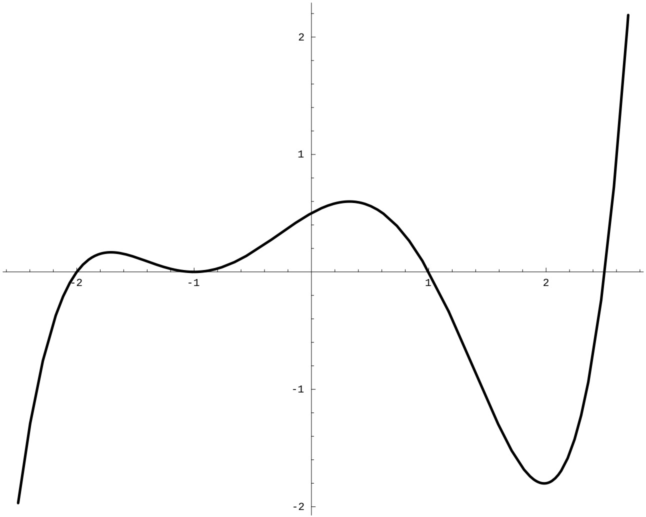
Основная идея

Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$

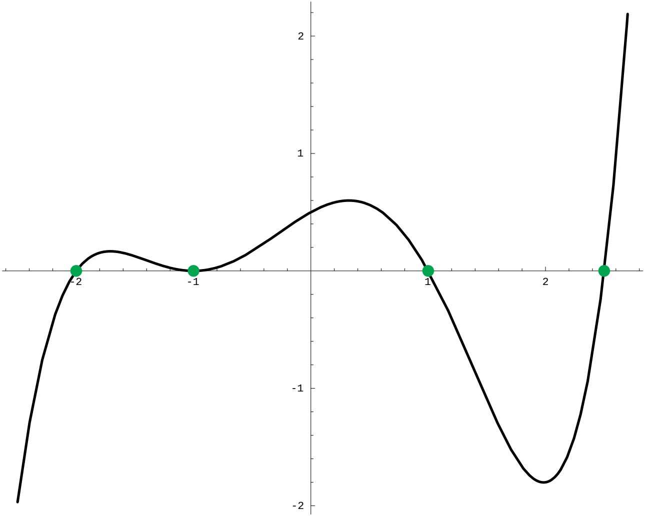
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$



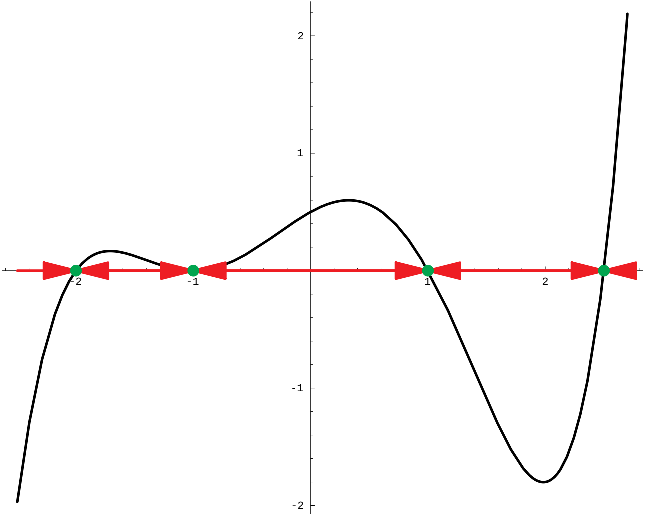
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$



Основная идея

$$\frac{1}{2}+\frac{11}{20}x-\frac{11}{20}x^2-\frac{13}{20}x^3+\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{10}x^5=0$$

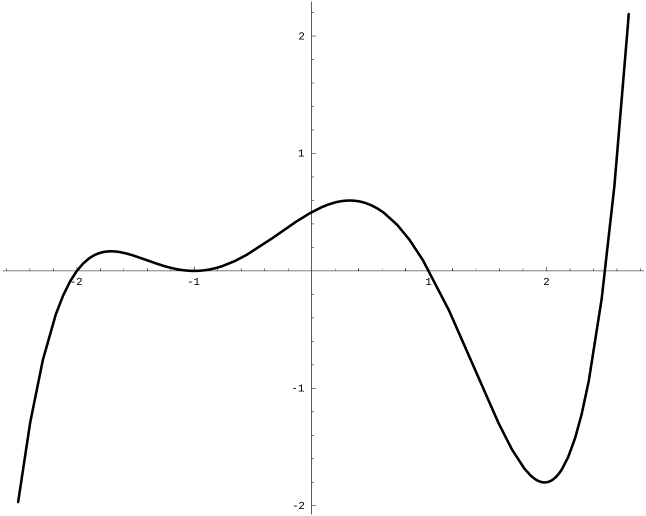


Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$

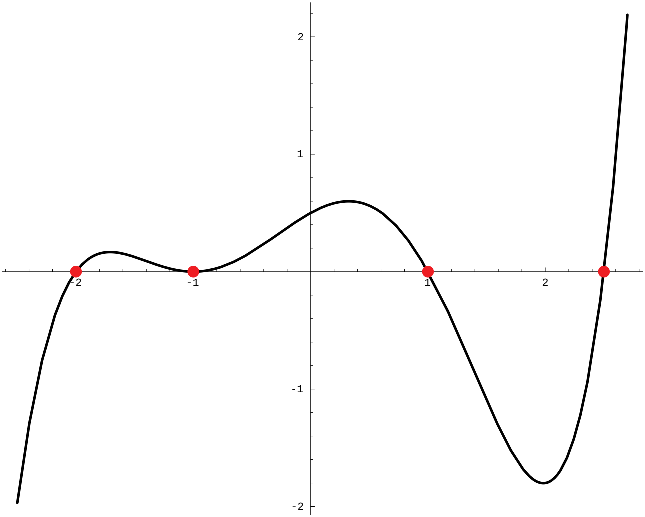
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$



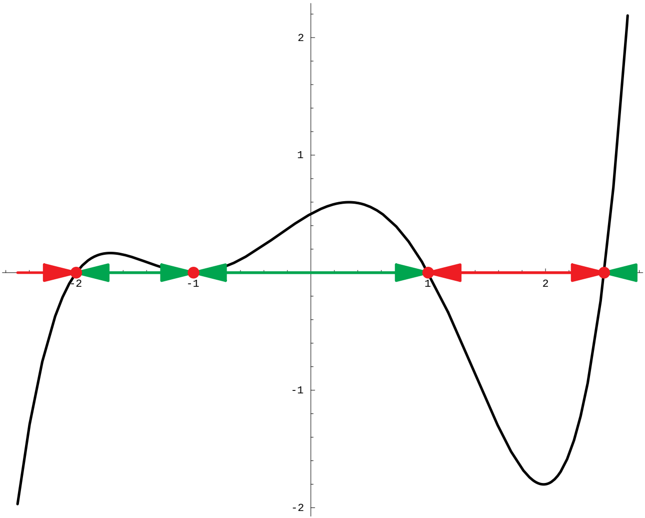
Основная идея

$$\frac{1}{2}+\frac{11}{20}x-\frac{11}{20}x^2-\frac{13}{20}x^3+\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{10}x^5>0$$



Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$

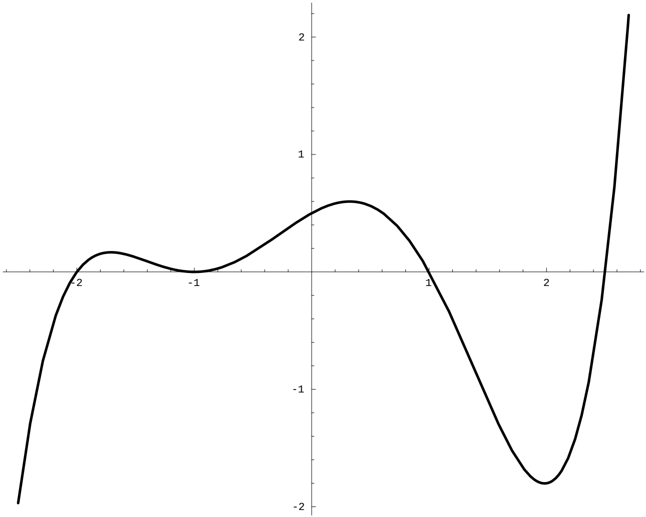


Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$

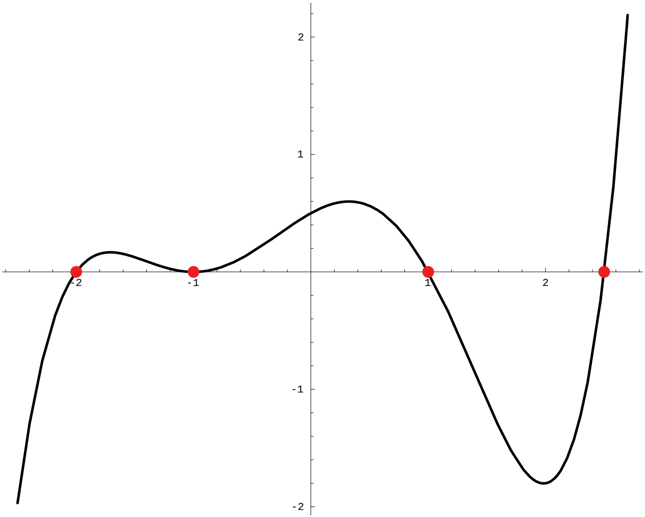
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$



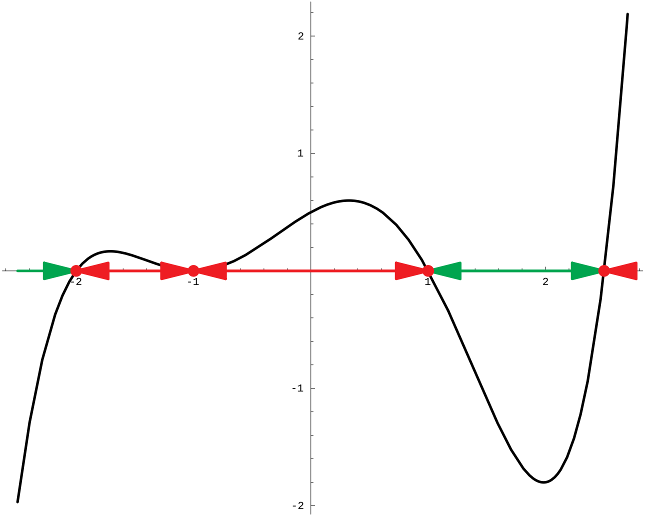
Основная идея

$$\frac{1}{2}+\frac{11}{20}x-\frac{11}{20}x^2-\frac{13}{20}x^3+\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{10}x^5<0$$



Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$



"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$;

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
   - для любого i, такого что $0 < i \leq n$, существует j, такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y <_j < x_i$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \ldots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
   - для любого i, такого что $0 < i \leq n$, существует j, такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y <_j < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \ldots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
   - для любого i, такого что $0 < i \leq n$, существует j, такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y <_j < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

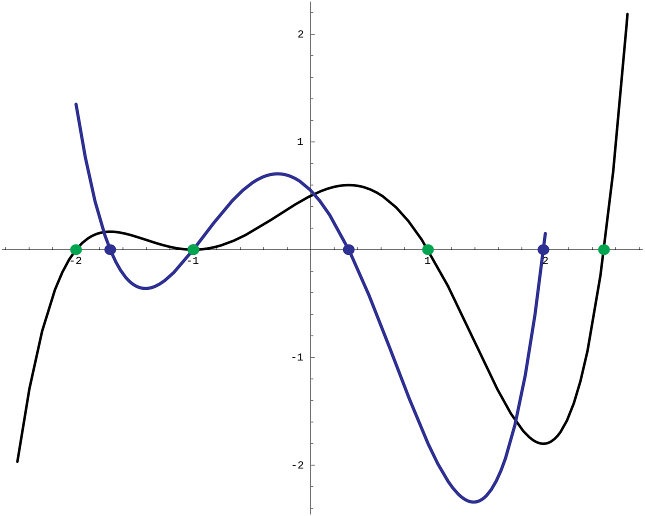
3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \ldots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
   - для любого i, такого что $0 < i \leq n$, существует j, такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y <_j < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
   - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$
4.
   - Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(y_0) \vee \cdots \vee \Phi(y_m)$$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что
$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$
3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \ldots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
    - для любого i, такого что $0 < i \leq n$, существует j, такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y <_j < x_i$
    - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
    - для любого i, такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$
4.
    - Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если
    $$\Phi(y_0) \vee \cdots \vee \Phi(y_m)$$
    - Формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если
    $$\Phi(y_0) \& \ldots \& \Phi(y_m)$$

Нули производной



"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$ю

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$ю
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$ю
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ – такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$ю
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ – такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$
5. - Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(x_{-\infty}) \vee \Phi(x_0) \vee \dots \vee \Phi(x_n) \vee \Phi(x_{+\infty})$$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$ю
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ – такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$
5.
   - Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если
   $$\Phi(x_{-\infty}) \vee \Phi(x_0) \vee \dots \vee \Phi(x_n) \vee \Phi(x_{+\infty})$$
   - Формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если
   $$\Phi(x_{-\infty}) \& \Phi(x_0) \& \dots \& \Phi(x_n) \& \Phi(x_{+\infty})$$

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

		$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\ldots$		$\ldots$		

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
		$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\ldots$		$\ldots$		

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$			$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$			$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\ldots$		$\ldots$		

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

$$x_0 < \cdots < x_j < \cdots < x_n$$

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

$$x_0 < \dots < x_j < \dots < x_n$$

$$\forall j \ \exists i \{P_i(x) \not\equiv 0 \,\&\, P_i(x_j) = 0\}$$

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$			$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$			$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\ldots$		$\ldots$		

$$x_0 < \cdots < x_j < \cdots < x_n$$

$$\forall j\ \exists i \{P_i(x) \not\equiv 0 \,\&\, P_i(x_j) = 0\}$$

$$\forall i \forall x \{(P_i(x) \not\equiv 0 \,\&\, P_i(x) = 0) \Rightarrow \exists j \{x = x_j\}\}$$

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$			$\dots$	$t_{i,j}$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$			$\dots$	$t_{i,j}$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

$$t_{i,j} = \begin{cases} -, & \text{если } P_i(x_j) < 0 \\ 0, & \text{если } P_i(x_j) = 0 \\ +, & \text{если } P_i(x_j) > 0 \end{cases}$$

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$		$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$		$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert\ +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$		$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\dots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$		$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\ldots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\ldots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$t_{i,-\infty}$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\ldots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\ldots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$t_{i,+\infty}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$		$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\ldots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	$\ldots$	$-\ \lvert 0 \rvert +$	

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$		$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$t_{i,-\infty}$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$t_{i,+\infty}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$		$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	

$$t_{i,-\infty} = \begin{cases} -, & \text{если } \exists x_{-\infty} \forall x \{x < x_{-\infty} \Rightarrow P_i(x) < 0\} \\ 0, & \text{если } \exists x_{-\infty} \forall x \{x < x_{-\infty} \Rightarrow P_i(x) = 0\} \\ +, & \text{если } \exists x_{-\infty} \forall x \{x < x_{-\infty} \Rightarrow P_i(x) > 0\} \end{cases}$$

$$t_{i,+\infty} = \begin{cases} -, & \text{если } \exists x_{+\infty} \forall x \{x > x_{+\infty} \Rightarrow P_i(x) < 0\} \\ 0, & \text{если } \exists x_{+\infty} \forall x \{x > x_{+\infty} \Rightarrow P_i(x) = 0\} \\ +, & \text{если } \exists x_{+\infty} \forall x \{x > x_{+\infty} \Rightarrow P_i(x) > 0\} \end{cases}$$

Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$- \|0\| +$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$- \|0\| +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$- \|0\| +$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$- \|0\| +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$- \|0\| +$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$\ldots$	$- \|0\| +$	$- \|0\| +$

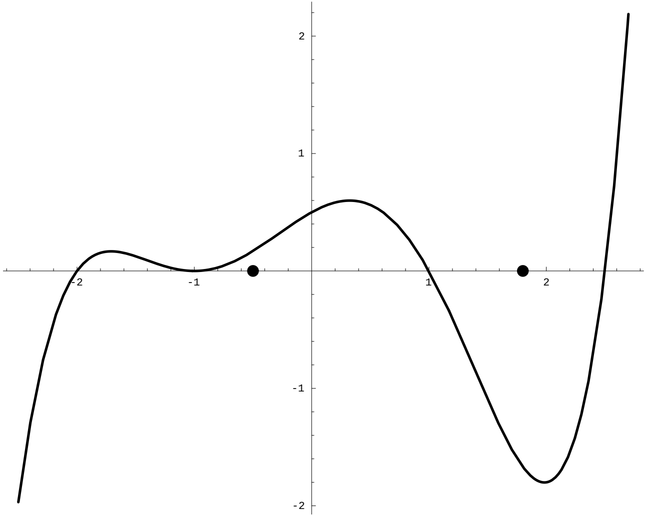
Таблица Тарского для многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$	x_0	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$\ldots$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$\ldots$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$-\,\lvert 0\rvert +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$\ldots$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$\ldots$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$-\,\lvert 0\rvert +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$\ldots$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$\ldots$	$-\,\lvert 0\rvert +$	$-\,\lvert 0\rvert +$

Лемма. Знаки $-$ и $+$ не могут стоять в двух соседних по горизонтали клетках.

Лемма.

Знаки $-$ и $+$ не могут стоять в двух соседних по горизонтали



"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & -\infty & x_0 & \dots & x_j & \dots & x_n & +\infty \\
\cline{2-8}
P_0(x) & -|0|+ & -|0|+ & \dots & -|0|+ & \dots & -|0|+ & -|0|+ \\
\cline{2-8}
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cline{2-8}
P_i(x) & -|0|+ & -|0|+ & \dots & -|0|+ & \dots & -|0|+ & -|0|+ \\
\cline{2-8}
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cline{2-8}
P_k(x) & -|0|+ & -|0|+ & \dots & -|0|+ & \dots & -|0|+ & -|0|+ \\
\cline{2-8}
\multicolumn{1}{c}{\Phi(x)} & \multicolumn{1}{c}{\text{и/л}} & \multicolumn{1}{c}{\text{и/л}} & \multicolumn{1}{c}{\dots} & \multicolumn{1}{c}{\text{и/л}} & \multicolumn{1}{c}{\dots} & \multicolumn{1}{c}{\text{и/л}} & \multicolumn{1}{c}{\text{и/л}}
\end{array}
$$

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

5. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны.

таблица Тарского

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$- \mid 0 \mid +$	$- \mid 0 \mid +$	$\dots$	$- \mid 0 \mid +$	$\dots$	$- \mid 0 \mid +$	$- \mid 0 \mid +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$- \mid 0 \mid +$	$- \mid 0 \mid +$	$\dots$	$- \mid 0 \mid +$	$\dots$	$- \mid 0 \mid +$	$- \mid 0 \mid +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$- \mid 0 \mid +$	$- \mid 0 \mid +$	$\dots$	$- \mid 0 \mid +$	$\dots$	$- \mid 0 \mid +$	$- \mid 0 \mid +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.
4. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\ldots$	и/л	$\ldots$	и/л	и/л

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \ldots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$.
4. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\ldots$	и/л	$\ldots$	и/л	и/л

5. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны.

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	$-\vert 0\vert +$	$-\vert 0\vert +$	$\ldots$	$-\vert 0\vert +$	$\ldots$	$-\vert 0\vert +$	$-\vert 0\vert +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert 0\vert +$	$-\vert 0\vert +$	$\ldots$	$-\vert 0\vert +$	$\ldots$	$-\vert 0\vert +$	$-\vert 0\vert +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert 0\vert +$	$-\vert 0\vert +$	$\ldots$	$-\vert 0\vert +$	$\ldots$	$-\vert 0\vert +$	$-\vert 0\vert +$

Полунасыщенные системы

Определение. Система функций называется *полунасыщенной*, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Полунасыщенные системы

Определение. Система функций называется *полунасыщенной*, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Лемма. Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной полунасыщенной системы.

Таблица Тарского

	$-\infty$		x_i	x_{i+1}		$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	0	0	$\dots$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$

Таблица Тарского

	$-\infty$		x_i	x_{i+1}		$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	0	0	$\dots$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$

Лемма. Если система многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$ полунасыщенна и $P_i(x) \not\equiv 0$, то в i-ой строке символ 0 не может стоять в двух соседних клетках.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется *полунасыщенной*, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется *полунасыщенной*, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ называется *насыщенной*, если вместе с каждыми двумя многочленами $P_k(x)$ и $P_m(x)$ такими, что $0 < \mathrm{degree}(P_m(x)) \leq \mathrm{degree}(P_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $P_k(x)$ на $P_m(x)$.

$$P_k(x) = Q(x)P_m(x) + R(x), \qquad \mathrm{degree}(R(x)) < \mathrm{degree}(P_m(x))$$

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется *полунасыщенной*, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ называется *насыщенной*, если вместе с каждыми двумя многочленами $P_k(x)$ и $P_m(x)$ такими, что $0 < \mathrm{degree}(P_m(x)) \leq \mathrm{degree}(P_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $P_k(x)$ на $P_m(x)$.

$$P_k(x) \quad = \quad Q(x)P_m(x) + R(x), \qquad \mathrm{degree}(R(x)) < \mathrm{degree}(P_m(x))$$

Лемма. Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной насыщенной системы.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется *полунасыщенной*, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ называется *насыщенной*, если вместе с каждыми двумя многочленами $P_k(x)$ и $P_m(x)$ такими, что $0 < \mathrm{degree}(P_m(x)) \leq \mathrm{degree}(P_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $P_k(x)$ на $P_m(x)$.

$$P_k(x) \quad = \quad Q(x)P_m(x) + R(x), \qquad \mathrm{degree}(R(x)) < \mathrm{degree}(P_m(x))$$

Лемма. Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной насыщенной системы.

Лемма. Если $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x), P_k(x)$ – насыщенная система многочленов, и

$$\mathrm{degree}(P_0(x)) \leq \cdots \leq \mathrm{degree}(P_{k-1}(x)) \leq \mathrm{degree}(P_k(x)),$$

то система $P_0(x) \ldots P_{k-1}(x)$ также является насыщенной.

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $P_0(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $P_0(x) \equiv 0$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $P_0(x) \equiv 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$P_0(x)$	0	0

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

Случай $\mathrm{degree}(P_1(x)) = \cdots = \mathrm{degree}(P_k(x)) = 0$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

Случай $\mathrm{degree}(P_1(x)) = \dots = \mathrm{degree}(P_k(x)) = 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$P_0(x)$	0	0
$P_1(x)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$		

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

Случай $\mathrm{degree}(P_1(x)) = \cdots = \mathrm{degree}(P_k(x)) = 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$P_0(x)$	0	0
$P_1(x)$	$-\mid+$	$-\mid+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\mid+$	$-\mid+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$			$\ldots$		$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$			$\ldots$		$\ldots$		

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\dots$	$-\vert 0\vert+$	$\dots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$							

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\dots$	$-\vert 0\vert+$	$\dots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$							?

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\dots$	$-\vert 0\vert+$	$\dots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$							?

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0 \\
&= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n}\right)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$							$-\vert+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0 \\
&= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{p_0}{x^n}\right)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$P_k(x)$	?						$-\|+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0 \\
&= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{p_0}{x^n}\right)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0 \vert+$	$\dots$	$-\vert 0 \vert+$	$\dots$	$-\vert 0 \vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\ \vert+$						$-\ \vert+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0 \\
&= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n}\right)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\ \vert+$			$?$			$-\ \vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$P_k(x)$	$-\ \|+$			$?$			$-\ \|+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$P_k(x)$	$-\|+$			?			$-\|+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\vert+$			$?$			$-\vert+$

$$P_k(x) \quad = \quad Q(x)P_m(x) + P_n(x)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\vert+$			$?$			$-\vert+$

$$P_k(x) \quad = \quad Q(x)P_m(x) + P_n(x)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\|+$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$\ldots$	$-\|0\|+$	$-\|+$
$P_k(x)$	$-\|+$			$?$			$-\|+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x)P_m(x) + P_n(x) \\
P_k(x_j) &= Q(x_j)P_m(x_j) + P_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\vert+$			$?$			$-\vert+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x)P_m(x) + P_n(x) \\
P_k(x_j) &= Q(x_j)P_m(x_j) + P_n(x_j) = P_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\vert+$			$-\vert 0\vert+$			$-\vert+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x)P_m(x) + P_n(x) \\
P_k(x_j) &= Q(x_j)P_m(x_j) + P_n(x_j) = P_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\vert+$			$-\ \vert 0\vert+$			$-\vert+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x)P_m(x) + P_n(x)\\
P_k(x_j) &= Q(x_j)P_m(x_j) + P_n(x_j) = P_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\vert+$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$\ldots$	$-\vert 0\vert+$	$-\vert+$
$P_k(x)$	$-\vert+$			$-\ \vert 0\vert+$			$-\vert+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x)P_m(x) + P_n(x) \\
P_k(x_j) &= Q(x_j)P_m(x_j) + P_n(x_j) = P_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x)$	$-\mid+$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$-\mid+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_m(x)$	$-\mid+$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	0	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$-\mid+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{k-1}(x)$	$-\mid+$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$-\mid+$
$P_k(x)$	$-\mid+$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$\ldots$	$-\mid 0 \mid+$	$-\mid+$

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x)P_m(x) + P_n(x) \\
P_k(x_j) &= Q(x_j)P_m(x_j) + P_n(x_j) = P_n(x_j)
\end{aligned}
$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\mid+$	$\dots$	$-\mid 0 \mid+$	$-\mid 0 \mid+$	$\dots$	$-\mid+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\mid+$	$\dots$	$-$	$+$	$\dots$	$-\mid+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-\ \vert 0\vert\ +$		$-\ \vert 0\vert\ +$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\dots$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$?$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$\dots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\dots$	$-$	0	$+$	$\dots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$+$	$?$	$-\ \vert 0 \vert\ +$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\dots$	$+$	$+$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$\dots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\dots$	$-$	0	$+$	$\dots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\mid+$	$\dots$	$-$	$?$	$-\ \mid 0 \mid\ +$	$\dots$	$-\mid+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\mid+$	$\dots$	$-$	0	$+$	$\dots$	$-\mid+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	$-$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	0	$?$	$-\ \vert 0\vert\ +$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \dots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\dots$	0	$?$	$+$	$\dots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\dots$	$-$	0	$+$	$\dots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	0	$+$	$+$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	0	$?$	$-$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

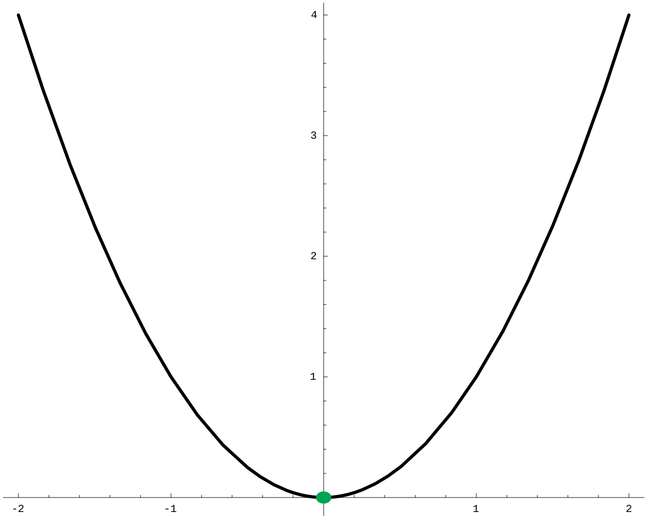
для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

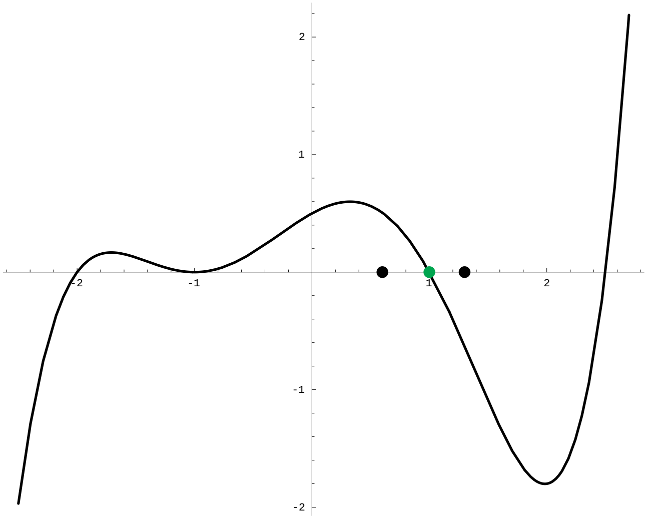
	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	0	$-$	$-$	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $P_0(x), \ldots, P_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$P_0(x)$	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	0	$?$	0	$\ldots$	$-\vert+$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\vert+$	$\ldots$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\vert+$


4
3
2
1
-2
-1
1
2


2
1
-1
-2
-2
-1
1
2

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $Q_1(x), \ldots, Q_l(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $Q_1(x), \ldots, Q_l(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $Q_0(x) = (Q_1(x) \ldots Q_l(x))'$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $Q_1(x), \dots, Q_l(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $Q_0(x) = (Q_1(x) \dots Q_l(x))'$
3. Расширить этот список до насыщенной системы $P_0(x), \dots, P_k(x)$ с

$$\mathrm{degree}(P_0(x)) \leq \dots \leq \mathrm{degree}(P_{k-1}(x)) \leq \mathrm{degree}(P_k(x))$$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $Q_1(x), \ldots, Q_l(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $Q_0(x) = (Q_1(x) \ldots Q_l(x))'$
3. Расширить этот список до насыщенной системы $P_0(x), \ldots, P_k(x)$ с

$$\mathrm{degree}(P_0(x)) \leq \cdots \leq \mathrm{degree}(P_{k-1}(x)) \leq \mathrm{degree}(P_k(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, k$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $Q_1(x), \dots, Q_l(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $Q_0(x) = (Q_1(x) \dots Q_l(x))'$
3. Расширить этот список до насыщенной системы $P_0(x), \dots, P_k(x)$ с
$$\mathrm{degree}(P_0(x)) \le \dots \le \mathrm{degree}(P_{k-1}(x)) \le \mathrm{degree}(P_k(x))$$
4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, k$
5. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $Q_1(x), \dots, Q_l(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $Q_0(x) = (Q_1(x) \dots Q_l(x))'$
3. Расширить этот список до насыщенной системы $P_0(x), \dots, P_k(x)$ с
$$\mathrm{degree}(P_0(x)) \le \dots \le \mathrm{degree}(P_{k-1}(x)) \le \mathrm{degree}(P_k(x))$$
4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, k$
5. Вычислить логические значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$+\infty$
$P_0(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$\dots$	$-\|0\|+$	$-\|0\|+$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

6. Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны