Системы типизации лямбда-исчисления

Лекция 10. Лямбда-куб и логические системы

Денис Москвин

15.05.2011

CS Club при ПОМИ РАН

Высказывания-как-типы (1)

Два способа представления логических систем в системах типов:

- ***Прямое представление***:
  одна система типов — одна логика;

- ***Logical Framework***:
  одна система типов — много логик.

Логические связки и их правила введения и удаления:
▶ *Прямое представление*: из системы типов;
▶ *Logical Framework*: из предзаданного контекста.

Высказывания-как-типы (2)

Пусть A — высказывание некоторой логики L, $[\![A]\!]$ — его интерпретация (тип) в некоторой системе типов.

Основные мета-вопросы:

- ***корректность*** (soundness):
  Если A — доказуемо в L, то $[\![A]\!]$ — обитаем.

- ***полнота*** (completness):
  Если $[\![A]\!]$ — обитаем, то A — доказуемо в L.

Высказывания-как-типы в системах λ-куба

Корректность.

- Имеет место для всех вершин куба.

Полнота.

- Имеет место для левой грани куба.
- При некоторых оговорках выполняется для λP.
- Не имеет места для $\lambda P\omega$.

Подробнее [LCWT 5.4].

Прямое представление логики в λP (1)

В λP можно вложить минимальную *логику предикатов первого порядка*.

Домены и формулы логики представляются типами, сигнатура задается в контексте:

$$\Gamma \equiv A{:}*,\ a{:}A,\ f{:}A\to A,\ P{:}A\to *,\ Q{:}A\to *,\ R{:}A\to A\to *$$

Связки: импликация представляется как $\to$, а квантор $\forall$ как Π:

$$\begin{aligned} \forall x \in A.\, P\,x \ &\sim\ \Pi x{:}A.\, P\,x \\ \forall x \in A.\, R\,x\,x \Rightarrow P\,x \ &\sim\ \Pi x{:}A.\, R\,x\,x \to P\,x \end{aligned}$$

Правила введения и удаления — это лямбда-абстракция и аппликация.

Прямое представление логики в λP (2)

$$A{:}* \;\vdash\; A \to * : \Box$$

Если A это тип, рассматриваемый как множество, то $A \to *$ представляет собой кайнд предикатов над A.

$$A{:}*,\;\; P{:}A \to *,\;\; a{:}A \;\vdash\; P\,a : *$$

Если $a \in A$, и P — предикат над A, то $P\,a$ — это тип, рассматриваемый как высказывание (истинное, если тип населен, и ложное в противном случае).
Различие между множествами и предикатами можно ввести явно:

$$A{:}*^s,\;\; P{:}A \to *^p,\;\; a{:}A \;\vdash\; P\,a : *^p$$

Прямое представление логики в λP (3)

$$A{:}*,\ \ R{:}A\to A\to *\ \vdash\ \Pi a{:}A.\, R\, a\, a : *$$

Если R бинарный предикат над A, то $\forall a \in A.\, R\, a\, a$ — высказывание.

$$A{:}*,\ \ P{:}A\to *,\ \ Q{:}A\to *\ \vdash\ \Pi a{:}A.\, P\, a \to Q\, a : *$$

Это высказывание утверждает, что предикат P, рассматриваемый как множество, вложен в предикат Q.

Прямое представление логики в λP (4)

$$A{:}*,\ P{:}A\to * \ \vdash\ \Pi a{:}A.\,P\,a \to P\,a : *$$

Это высказывание утверждает рефлексивность вложения.

«Доказательство» рефлексивности вложения.

$$A{:}*,\ P{:}A\to * \ \vdash\ \lambda a{:}A.\,\lambda x{:}P\,a.\,x : \Pi a{:}A.\,P\,a \to P\,a : *$$

Дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{A{:}*,\ P{:}A\to *,\ a{:}A,\ x{:}P\,a \ \vdash\ x : P\,a}{A{:}*,\ P{:}A\to *,\ a{:}A \ \vdash\ \lambda x{:}P\,a.\,x : P\,a \to P\,a}}{A{:}*,\ P{:}A\to * \ \vdash\ \lambda a{:}A.\,\lambda x{:}P\,a.\,x : \Pi a{:}A.\,P\,a \to P\,a}$$

Прямое представление логики в λP (5)

В контексте

$$\Gamma \;\equiv\; A{:}{*},\;\; P{:}A \to {*},\;\; Q{:}{*}$$

имеем

$$\Gamma \;\vdash\; (\Pi a{:}A.\, P\,a \to Q) \to (\Pi a{:}A.\, P\,a) \to Q \;:\; {*}$$

$$\begin{aligned}\Gamma,\;\; a_0{:}A \;&\vdash\; \lambda f{:}(\Pi a{:}A.\, P\,a \to Q).\, \lambda g{:}(\Pi a{:}A.\, P\,a).\, f\,a_0\,(g\,a_0)\\ &:\; \Pi f{:}(\Pi a{:}A.\, P\,a \to Q).\, \Pi g{:}(\Pi a{:}A.\, P\,a).\, Q \equiv\\ &\qquad (\Pi a{:}A.\, P\,a \to Q) \to (\Pi a{:}A.\, P\,a) \to Q\end{aligned}$$

Это высказывание «доказывает», что

$$(\forall a \in A.\, P\,a \Rightarrow Q) \Rightarrow (\forall a \in A.\, P\,a) \Rightarrow Q$$

является истинным для *непустых* структур A.

Прямое представление логики в $\lambda P2$

Напомним, что $\bot \equiv \Pi A{:}*.\, A \equiv \forall A.\, A$.

Пусть $\Gamma \equiv A{:}*,\ R{:}A \to A \to *$, тогда

$$\Gamma \ \vdash \ (\Pi a{:}A.\, \Pi b{:}A.\, R\,a\,b \to R\,b\,a \to \bot) \to (\Pi a{:}A.\, R\,a\,a \to \bot) : *$$

Это высказывание утверждает, что асимметричное бинарное отношение иррефлексивно

$$(\forall a, b \in A.\, R\,a\,b \Rightarrow R\,b\,a \Rightarrow \bot) \Rightarrow (\forall a \in A.\, R\,a\,a \Rightarrow \bot)$$

Докажите это утверждение, приведя терм такого типа.

Прямое представление логики в $\lambda\omega$

В $\lambda 2$ было:

$$\begin{aligned} \sigma + \tau &\equiv \Pi\alpha{:}{*}.\,(\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha \\ \sigma{:}{*},\ \tau{:}{*} &\vdash \sigma + \tau : {*} \end{aligned}$$

В $\lambda\omega$ можно ввести

$$\begin{aligned} \bigvee &: {*} \to {*} \to {*} \\ \bigvee &\equiv \lambda\sigma{:}{*}.\,\lambda\tau{:}{*}.\,\sigma + \tau \end{aligned}$$

Тогда $\sigma \to \bigvee \sigma\,\tau$ — тавтология:

$$\sigma{:}{*},\ \tau{:}{*} \vdash \lambda x^{\sigma}\,\alpha^{*}\,f^{\sigma\to\alpha}\,g^{\tau\to\alpha}.\,f\,x \ :\ \sigma \to \bigvee \sigma\,\tau$$

Докажите, что $\bigwedge \sigma\,\tau \to \sigma$ и $\bigwedge \sigma\,\tau \to \tau$ — тавтологии.

Прямое представление логики в $\lambda P\underline{\omega}$

В λP можно «диагонализовать» имеющийся бинарный предикат

$$A{:}*,\ P{:}A\to A\to *,\ a{:}A\ \vdash\ P\,a\,a : * : \square$$

$$A{:}*,\ P{:}A\to A\to *\ \vdash\ \lambda a{:}A.\,P\,a\,a : A\to * : \square$$

В $\lambda P\underline{\omega}$ можно задать оператор «диагонализации», абстрагируясь по предикату

$$A{:}*\ \vdash\ \lambda P{:}A\to A\to *.\,\lambda a{:}A.\,P\,a\,a : (A\to A\to *)\to(A\to *) : \square$$

и по домену

$$\vdash\ \lambda A{:}*.\,\lambda P{:}A\to A\to *.\,\lambda a{:}A.\,P\,a\,a : \Pi A{:}*.\,\Pi P{:}A\to A\to *.\,\Pi a{:}A.\,* : \square$$

Logical Framework (LF)

- Система типов используется как метасистема.
- Объектная логическая система задаётся в контексте, *в том числе там задаются и правила вывода*.
- Сигнатура логики также задаётся контексте.

Logical Framework позволяет вложить различные логические системы в одну систему типов.

PROP через LF в λP (1)

Минимальная пропозициональная логика PROP.

Вводится специальный тип имён высказываний $\mathtt{prop}$:

$$\mathtt{prop} : *$$

Импликация «связывает» два высказывания

$$\Rightarrow \; : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}$$

Импликацию будем записывать инфиксно

$$x{:}\mathtt{prop},\; y{:}\mathtt{prop} \;\vdash\; x \Rightarrow y : \mathtt{prop}$$

PROP через LF в λP (2)

Конструктор типа (типовый оператор)

$$\mathtt{T} \; : \; \mathtt{prop} \to *$$

«поднимает» имя высказывания $p : \mathtt{prop}$ в тип его доказательства $\mathtt{T}\, p : *$.

Населенность типа $\mathtt{T}\, p$ соответствует доказуемости высказывания p.

Введение и удаление импликации

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{imp\_intr} & : & \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, (\mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b) \to \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \\ \mathtt{imp\_elim} & : & \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \to \mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b \end{array}$$

PROP через LF в λP (3)

Например, доказательство, что из a следует a:

Представление логики	Формула	Доказательство
Прямое кодирование	$a \to a$	$\lambda x{:}a.\, x$
LF-вложение	$\mathtt{T}\,(a \Rightarrow a)$	$\mathtt{imp\_intr}\ a\, a\, (\lambda x{:}\mathtt{T}\, a.\, x)$

PROP через LF в λP (4)

Контекст — сигнатура для PROP:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{PROP}} \;\equiv\; & \mathtt{prop} : *, \\
& \mathtt{T} : \mathtt{prop} \to *, \\
& \Rightarrow : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}, \\
& \mathtt{imp_intr} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, (\mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b) \to \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \\
& \mathtt{imp_elim} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \to \mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b
\end{aligned}$$

Теорема. LF-кодирование PROP в λP *корректно*, то есть

$$\vdash_{\mathrm{PROP}} p \;\Rightarrow\; \exists\, M, a_1, \ldots, a_n\; [\Sigma_{\mathrm{PROP}}, a_1{:}\mathtt{prop}, \ldots, a_n{:}\mathtt{prop} \vdash_{\lambda P} M : \mathtt{T}\, p]$$

Теорема. LF-кодирование PROP в λP *полно*, то есть

$$\Sigma_{\mathrm{PROP}}, a_1{:}\mathtt{prop}, \ldots, a_n{:}\mathtt{prop} \vdash_{\lambda P} M : \mathtt{T}\, p \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathrm{PROP}} p$$

PROP через LF в λP (5)

Пример. Докажем, что $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$.

Пусть $\Gamma \equiv \Sigma_{PROP}, a{:}\mathtt{prop}, b{:}\mathtt{prop}$, тогда

$$
\begin{array}{rcl}
\Gamma, x{:}\mathtt{T}\,a & \vdash & (\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x) : \mathtt{T}\,b \to \mathtt{T}\,a \\
\Gamma, x{:}\mathtt{T}\,a & \vdash & \mathtt{imp\_intr}\ b\,a\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x) : \mathtt{T}\,(b \Rightarrow a) \\
\Gamma & \vdash & \lambda x{:}\mathtt{T}\,a.\,\mathtt{imp\_intr}\ b\,a\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x) : \mathtt{T}\,a \to \mathtt{T}\,(b \Rightarrow a) \\
\Gamma & \vdash & \mathtt{imp\_intr}\ a\,(b \Rightarrow a)\,(\lambda x{:}\mathtt{T}\,a.\,\mathtt{imp\_intr}\ b\,a\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x)) \\
 & & \qquad : \mathtt{T}\,(a \Rightarrow (b \Rightarrow a)) \\
\Gamma & \vdash & \mathtt{imp\_intr}\ [\_]\,[\_]\,(\lambda x{:}\mathtt{T}\,a.\,\mathtt{imp\_intr}\ [\_]\,[\_]\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x)) \\
 & & \qquad : \mathtt{T}\,(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))
\end{array}
$$

для справки

$$\mathtt{imp\_intr} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\,\Pi b{:}\mathtt{prop}.\,(\mathtt{T}\,a \to \mathtt{T}\,b) \to \mathtt{T}\,(a \Rightarrow b)$$

PRED через LF в λP (1)

Минимальная логика предикатов (над доменом A) PRED.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{PRED}} \;\equiv\; & \mathtt{prop} : *,\ \ \mathtt{T} : \mathtt{prop} \to *,\ \ A : *,\ \ f : A \to A,\ \ R : A \to A \to \mathtt{prop}, \\
& \Rightarrow : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}, \\
& \mathtt{imp_intr} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, (\mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b) \to \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b), \\
& \mathtt{imp_elim} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \to \mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b, \\
& \forall : (A \to \mathtt{prop}) \to \mathtt{prop}, \\
& \forall\mathtt{_intr} : \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\, (\Pi x{:}A.\, \mathtt{T}\, (P\, x)) \to \mathtt{T}\, (\forall P), \\
& \forall\mathtt{_elim} : \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\, \mathtt{T}\, (\forall P) \to \Pi x{:}A.\, \mathtt{T}\, (P\, x)
\end{aligned}$$

Квантификация $\forall x \in A.\, P\, x$ представляется как $\forall(\lambda x{:}A.\, P\, x)$.
Предикаты теперь обычные функции, а не типовые операторы!

Теорема. LF-кодирование PRED в λP *корректно* и *полно*.

PRED через LF в λP (2)

Пример. Докажите, что

$$\forall z \in A. (\forall x, y \in A.\, R\, x\, y) \Rightarrow R\, z\, z$$

Решение. Тип этого утверждения в LF:

$$T(\forall(\lambda z{:}A.\, (\forall(\lambda x{:}A.\, (\forall(\lambda y{:}A.\; R\, x\, y)))) \;\Rightarrow\; (R\, z\, z)))$$

Терм этого типа:

$$\begin{array}{l} \forall\_\mathtt{intr}\,[\_](\lambda z{:}A.\, \mathtt{imp\_intr}\;[\_]\,[\_]\,(\lambda f{:}\mathtt{T}\,(\forall(\lambda x{:}A.\,(\forall(\lambda y{:}A.\; R\, x\, y)))).\\ \qquad\qquad \forall\_\mathtt{elim}\;[\_]\,(\forall\_\mathtt{elim}\;[\_]\, f\, z)\, z)) \end{array}$$

для справки

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{imp\_intr} & : & \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, (\mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b) \to \mathtt{T}\,(a \Rightarrow b)\\ \forall\_\mathtt{intr} & : & \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\, (\Pi x{:}A.\, \mathtt{T}\,(P\, x)) \to \mathtt{T}\,(\forall P)\\ \forall\_\mathtt{elim} & : & \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\, \mathtt{T}\,(\forall P) \to \Pi x{:}A.\, \mathtt{T}\,(P\, x) \end{array}$$

Домашнее задание (1)

Для прямого представления логики в λP найдите контекст и терм, доказывающий утверждения

$$(\forall x \in A.\, P\,x \Rightarrow Q\,x) \Rightarrow (\forall x \in A.\, P\,x) \Rightarrow (\forall x \in A.\, Q\,x)$$

$$(\forall x \in A.\, P\,x \Rightarrow \forall z \in A.\, R\,z\,z) \Rightarrow (\forall x \in A.\, P\,x) \Rightarrow (\forall z \in A.\, R\,z\,z)$$

Докажите первое из этих утверждений в λP, рассматриваемой как LF для минимальной логики предикатов PRED.

Домашнее задание (2)

- В $\lambda\omega$ определим $\sigma \times \tau \equiv \Pi\alpha{:}{*}.\,(\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$ и

$$\begin{aligned} \wedge &: * \to * \to * \\ \wedge &\equiv \lambda\sigma{:}{*}.\,\lambda\tau{:}{*}.\,\sigma \times \tau \end{aligned}$$

Для прямого представления логики в $\lambda\omega$ докажите, что $\wedge\,\sigma\,\tau \to \sigma$ и $\wedge\,\sigma\,\tau \to \tau$ — тавтологии.

- В $\lambda\omega$ определим

$$\begin{aligned} \neg &: * \to * \\ \neg &\equiv \lambda\alpha{:}{*}.\,\alpha \to \bot \end{aligned}$$

Для прямого представления логики в $\lambda\omega$ докажите, что $(\sigma \to \tau) \to (\neg\,\tau \to \neg\,\sigma)$ — тавтология.

Домашнее задание (3)

- В $\lambda P2$ найдите терм M, такой что для $\Gamma \equiv A{:}*,\ R{:}A \to A \to *$

$$\Gamma \ \vdash \ M : (\Pi a{:}A.\, \Pi b{:}A.\, R\,a\,b \to R\,b\,a \to \bot) \to (\Pi a{:}A.\, R\,a\,a \to \bot)$$

Иными словами докажите (в прямом представления логики в $\lambda P2$), что асимметричное бинарное отношение иррефлексивно.

- В λP, рассматриваемой как LF для минимальной пропозициональной логики, докажите, что $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$, то есть сконструируйте терм типа $\mathtt{T}((a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)))$ в контексте $a{:}\mathtt{prop}$, $b{:}\mathtt{prop}$, $c{:}\mathtt{prop}$.

Литература (1)

ITT гл. 6

Herman Geuvers, Introduction to Type Theory

Alfa Lernet Summer school 2008, Uruguay

`http://www.cs.ru.nl/H.Geuvers/Uruguay2008SummerSchool.html`

LCWT гл. 5.4

Henk Barendregt, Lambda calculi with types,

Handbook of logic in computer science (vol. 2), Oxford University Press, 1993

Литература (2)

ATTAPL гл. 2

Benjamin C. Pierce, editor.

Advanced Topics in Types and Programming Languages, MIT, 2005