Приближенное решение задач комбинаторной оптимизации: алгоритмы и трудность
Лекция 10: Гипотеза Хота (Unique Games Conjecture)

М. Вялый

Вычислительный центр
им. А.А.Дородницына
ФИЦ ИУ РАН

Санкт-Петербург, Computer Science Club, 2016

Доказательства трудности приближения

NP-трудность	Оптимальные константы точности
MAX-LC$_k(1,\varepsilon)$	MAX-3LIN, MAX-3SAT
MAX-ULC$_k$	MAX-CUT, MAX-2SAT, MIN-VC

Задача MAX-ULC$_k$ неформально

Речь идёт об игре в допрос (один Проверяющий, два Доказывающих), в которой ответы Доказывающих должны быть строго согласованы: для каждого ответа одного есть ровно один ответ другого, который удовлетворит Проверяющего.

Доказательства трудности приближения

NP-трудность	Оптимальные константы точности
MAX-LC$_k(1, \varepsilon)$	MAX-3LIN, MAX-3SAT
MAX-ULC$_k$	MAX-CUT, MAX-2SAT, MIN-VC

Задача MAX-ULC$_k$ неформально

Речь идёт об игре в допрос (один Проверяющий, два Доказывающих), в которой ответы Доказывающих должны быть строго согласованы: для каждого ответа одного есть ровно один ответ другого, который удовлетворит Проверяющего.

Доказательства трудности приближения

NP-трудность	Оптимальные константы точности
MAX-LC$_k(1,\varepsilon)$	MAX-3LIN, MAX-3SAT
MAX-ULC$_k$	MAX-CUT, MAX-2SAT, MIN-VC

Задача MAX-ULC$_k$ неформально

Речь идёт об игре в допрос (один Проверяющий, два Доказывающих), в которой ответы Доказывающих должны быть строго согласованы: для каждого ответа одного есть ровно один ответ другого, который удовлетворит Проверяющего.

Доказательства трудности приближения

NP-трудность	Оптимальные константы точности
MAX-$\mathrm{LC}_k(1, \varepsilon)$	MAX-3LIN, MAX-3SAT
MAX-ULC_k	MAX-CUT, MAX-2SAT, MIN-VC

Задача MAX-ULC_k неформально

Речь идёт об игре в допрос (один Проверяющий, два Доказывающих), в которой ответы Доказывающих должны быть строго согласованы: для каждого ответа одного есть ровно один ответ другого, который удовлетворит Проверяющего.

Биективные игры

Задача MAX-ULC$_k$

Дано: двудольный граф ограничений; вершины в доле V_1 имеют одинаковую степень; ограничения — биекции, то есть для каждого ребра $e = (v_1 v_2)$ задана биекция $\pi_e \colon \Sigma \to \Sigma$, ограничение на ребре выполнено присваиванием σ, если $\pi_e(\sigma(v_1)) = \sigma(v_2)$. Размер алфавита равен k.

Найти: присваивание, выполняющее максимальное количество ограничений.

Гипотеза Хота, UGC

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k, что задача MAX-ULC$_k(1-\varepsilon, \varepsilon)$ является NP-трудной.

Биективные игры

Задача MAX-ULC$_k$

Дано: двудольный граф ограничений; вершины в доле V_1 имеют одинаковую степень; ограничения — биекции, то есть для каждого ребра $e = (v_1 v_2)$ задана биекция $\pi_e \colon \Sigma \to \Sigma$, ограничение на ребре выполнено присваиванием σ, если $\pi_e(\sigma(v_1)) = \sigma(v_2)$. Размер алфавита равен k.

Найти: присваивание, выполняющее максимальное количество ограничений.

Гипотеза Хота, UGC

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k, что задача MAX-ULC$_k(1-\varepsilon, \varepsilon)$ является NP-трудной.

Сравнение функциональных и биективных ограничений

1. Задача MAX-LC$_7(1, 1-\varepsilon)$ является NP-трудной.
2. При любом k задача MAX-ULC$_k(1, 1-\varepsilon)$ лежит в P.
   Проверка возможности выполнить все ограничения: выбираем одну из вершин, проверяем возможные присваивания для неё и распространяем значения по графу, удовлетворяя биективным ограничениям.
   Из-за биективности распространение однозначно определено.

Сравнение функциональных и биективных ограничений

1. Задача MAX-$\mathrm{LC}_7(1, 1-\varepsilon)$ является NP-трудной.
2. При любом k задача MAX-$\mathrm{ULC}_k(1, 1-\varepsilon)$ лежит в P.
   Проверка возможности выполнить все ограничения: выбираем одну из вершин, проверяем возможные присваивания для неё и распространяем значения по графу, удовлетворяя биективным ограничениям.
   Из-за биективности распространение однозначно определено.

Сравнение функциональных и биективных ограничений

1. Задача MAX-LC$_7(1, 1-\varepsilon)$ является NP-трудной.
2. При любом k задача MAX-ULC$_k(1, 1-\varepsilon)$ лежит в P.
   Проверка возможности выполнить все ограничения: выбираем одну из вершин, проверяем возможные присваивания для неё и распространяем значения по графу, удовлетворяя биективным ограничениям.
   Из-за биективности распространение однозначно определено.

$\sigma(u) = 1$ ——— $\sigma(v) = ?$

Если $\sigma(u) = 1$ и $\pi_{uv}(1) = 2$, то $\sigma(v) = 2$.

UGC-оптимальность константы Гёманса–Вильямсона

Теорема

Из UGC следует, что для любых ϑ, $\pi/2 < \vartheta < \pi$ и $\varepsilon > 0$ задача MAX-CUT$((1 - \cos\vartheta)/2 - \varepsilon, \vartheta/\pi + \varepsilon)$ является NP-трудной.

Напоминание

Константа Гёманса–Вильямсона

$$\alpha_{\mathrm{GW}} = \min_{0<\vartheta<\pi} \frac{\vartheta/\pi}{(1-\cos\vartheta)/2} \approx 0.8786,$$

минимум достигается при $\vartheta^* \approx 133^\circ$.
Поэтому из теоремы следует, что в предположении UGC и $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ для задачи MAX-CUT не существует полиномиального алгоритма с точностью $\alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon$.

UGC-оптимальность константы Гёманса–Вильямсона

Теорема

Из UGC следует, что для любых ϑ, $\pi/2 < \vartheta < \pi$ и $\varepsilon > 0$ задача $\text{MAX-CUT}((1-\cos\vartheta)/2 - \varepsilon, \vartheta/\pi + \varepsilon)$ является NP-трудной.

Напоминание

Константа Гёманса–Вильямсона

$$\alpha_{\mathrm{GW}} = \min_{0<\vartheta<\pi} \frac{\vartheta/\pi}{(1-\cos\vartheta)/2} \approx 0.8786,$$

минимум достигается при $\vartheta^* \approx 133^\circ$.
Поэтому из теоремы следует, что в предположении UGC и $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ для задачи MAX-CUT не существует полиномиального алгоритма с точностью $\alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon$.

Общий план доказательства

Аналогично теореме Хостада: строим PCP алгоритм для MAX-ULC$_m(1-\delta, \delta)$.

Алгоритм работает с «доказательством»: список таблиц значений булевых функций f_w для каждой вершины графа. (Предположительно, это длинные коды присваивания.)

Алгоритм делает всего 2 запроса к таблицам и проверяет полученные биты на неравенство. (Фактически, проверяет выполнение ограничения на ребре.)

Отсюда получается взвешенный граф для задачи MAX-CUT.

Отличие от теоремы Хостада:

Нельзя сравнивать таблицы в двух концах ребра. Граф ограничений двудольный, поэтому при таком сравнении всегда будет разрез максимального веса.

Общий план доказательства

Аналогично теореме Хостада: строим PCP алгоритм для $\text{MAX-ULC}_m(1-\delta,\delta)$.

Алгоритм работает с «доказательством»: список таблиц значений булевых функций f_w для каждой вершины графа.

(Предположительно, это длинные коды присваивания.)

Алгоритм делает всего 2 запроса к таблицам и проверяет полученные биты на неравенство. (Фактически, проверяет выполнение ограничения на ребре.)

Отсюда получается взвешенный граф для задачи MAX-CUT.

Отличие от теоремы Хостада:

Нельзя сравнивать таблицы в двух концах ребра. Граф ограничений двудольный, поэтому при таком сравнении всегда будет разрез максимального веса.

Общий план доказательства

Аналогично теореме Хостада: строим PCP алгоритм для MAX-ULC$_m(1-\delta, \delta)$.
Алгоритм работает с «доказательством»: список таблиц значений булевых функций f_w для каждой вершины графа.
(Предположительно, это длинные коды присваивания.)
Алгоритм делает всего 2 запроса к таблицам и проверяет полученные биты на неравенство. (Фактически, проверяет выполнение ограничения на ребре.)
Отсюда получается взвешенный граф для задачи MAX-CUT.

Отличие от теоремы Хостада:

Нельзя сравнивать таблицы в двух концах ребра. Граф ограничений двудольный, поэтому при таком сравнении всегда будет разрез максимального веса.

Общий план доказательства

Аналогично теореме Хостада: строим PCP алгоритм для $\mathsf{MAX\text{-}ULC}_m(1-\delta,\delta)$.

Алгоритм работает с «доказательством»: список таблиц значений булевых функций f_w для каждой вершины графа. (Предположительно, это длинные коды присваивания.)

Алгоритм делает всего 2 запроса к таблицам и проверяет полученные биты на неравенство. (Фактически, проверяет выполнение ограничения на ребре.)

Отсюда получается взвешенный граф для задачи MAX-CUT.

Отличие от теоремы Хостада:

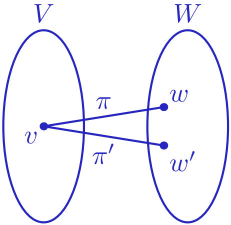
Нельзя сравнивать таблицы в двух концах ребра. Граф ограничений двудольный, поэтому при таком сравнении всегда будет разрез максимального веса.

Неформальное описание запросов

Ограничения биективны, поэтому значения присваивания в левой доле определяются по значениям в правой доле.

Неформальное описание запросов

Ограничения биективны, поэтому значения присваивания в левой доле определяются по значениям в правой доле.



При выполнении ограничений на рёбрах

$$f_w(\pi \circ x) = f_v(x) = f_{w'}(\pi' \circ x).$$

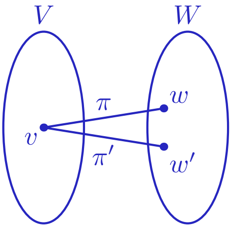
($f_w(x)$ — функции из «доказательства»)

Здесь $\circ$ — действие перестановки на координатах, а π, π' — ограничения-перестановки на рёбрах (v, w), (v, w') соответственно:

$$\pi(\sigma(w)) = \sigma(v); \qquad \pi'(\sigma(w')) = \sigma(v),$$

Неформальное описание запросов

Ограничения биективны, поэтому значения присваивания в левой доле определяются по значениям в правой доле.



При выполнении ограничений на рёбрах

$$f_w(\pi \circ x) = f_v(x) = f_{w'}(\pi' \circ x).$$

($f_w(x)$ — функции из «доказательства»)

Мы хотим проверять ограничения вида неравенства. Для этого будем добавлять шум (почти инвертировать x).

Точное описание запросов в PCP алгоритме

Как и раньше, наряду с ϑ используем параметр $\rho = \cos\vartheta$, $-1 < \rho < 0$.

1. Выбрать x из равномерного распределения на $\{0,1\}^m$, а x' — из распределения $N_\rho(x)$ (вероятность инвертирования каждого бита равна $(1-\rho)/2$).
2. Выбрать случайно вершину v из левой доли V из равномерного распределения.
3. Выбрать двух случайных соседей w, w' вершины v (распределение равномерное).
4. Запросить из таблиц биты $f_w(\pi \circ x)$ и $f_{w'}(\pi' \circ x')$ и ответить «да», если

$$f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x').$$

Здесь π, π' — ограничения-перестановки на рёбрах (v, w), (v, w') соответственно.

Точное описание запросов в PCP алгоритме

Как и раньше, наряду с ϑ используем параметр $\rho = \cos\vartheta$, $-1 < \rho < 0$.

1. Выбрать x из равномерного распределения на $\{0,1\}^m$, а x' — из распределения $N_\rho(x)$ (вероятность инвертирования каждого бита равна $(1-\rho)/2$).
2. Выбрать случайно вершину v из левой доли V из равномерного распределения.
3. Выбрать двух случайных соседей w, w' вершины v (распределение равномерное).
4. Запросить из таблиц биты $f_w(\pi \circ x)$ и $f_{w'}(\pi' \circ x')$ и ответить «да», если

$$f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x').$$

Здесь π, π' — ограничения-перестановки на рёбрах (v, w), (v, w') соответственно.

Точное описание запросов в PCP алгоритме

Как и раньше, наряду с ϑ используем параметр $\rho = \cos\vartheta$, $-1 < \rho < 0$.

1. Выбрать x из равномерного распределения на $\{0,1\}^m$, а x' — из распределения $N_\rho(x)$ (вероятность инвертирования каждого бита равна $(1-\rho)/2$).
2. Выбрать случайно вершину v из левой доли V из равномерного распределения.
3. Выбрать двух случайных соседей w, w' вершины v (распределение равномерное).
4. Запросить из таблиц биты $f_w(\pi \circ x)$ и $f_{w'}(\pi' \circ x')$ и ответить «да», если

$$f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x').$$

Здесь π, π' — ограничения-перестановки на рёбрах (v, w), (v, w') соответственно.

Точное описание запросов в PCP алгоритме

Как и раньше, наряду с ϑ используем параметр $\rho = \cos\vartheta$, $-1 < \rho < 0$.

1. Выбрать x из равномерного распределения на $\{0,1\}^m$, а x' — из распределения $N_\rho(x)$ (вероятность инвертирования каждого бита равна $(1-\rho)/2$).
2. Выбрать случайно вершину v из левой доли V из равномерного распределения.
3. Выбрать двух случайных соседей w, w' вершины v (распределение равномерное).
4. Запросить из таблиц биты $f_w(\pi \circ x)$ и $f_{w'}(\pi' \circ x')$ и ответить «да», если
$$f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x').$$
Здесь π, π' — ограничения-перестановки на рёбрах (v,w), (v,w') соответственно.

Точное описание запросов в PCP алгоритме

Как и раньше, наряду с ϑ используем параметр $\rho = \cos\vartheta$, $-1 < \rho < 0$.

1. Выбрать x из равномерного распределения на $\{0,1\}^m$, а x' — из распределения $N_\rho(x)$ (вероятность инвертирования каждого бита равна $(1-\rho)/2$).
2. Выбрать случайно вершину v из левой доли V из равномерного распределения.
3. Выбрать двух случайных соседей w, w' вершины v (распределение равномерное).
4. Запросить из таблиц биты $f_w(\pi \circ x)$ и $f_{w'}(\pi' \circ x')$ и ответить «да», если
$$f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x').$$
Здесь π, π' — ограничения-перестановки на рёбрах (v, w), (v, w') соответственно.

Свойства алгоритма

Лемма о полноте

Пусть $\varepsilon \geqslant 2\delta$. Если для графа ограничений существует присваивание, которое выполняет долю $1-\delta$ ограничений, то существует такой набор таблиц, на котором вероятность ответа «да» в тесте не меньше

$$\frac{1-\rho}{2} - \varepsilon.$$

Лемма о корректности

Существуют такие константы τ и C, зависящие от ρ, ε, что при $\delta = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ справедливо:
если для графа ограничений любое присваивание выполняет не более доли δ ограничений, то для любого набора таблиц вероятность ответа «да» в тесте не больше

$$\frac{\arccos\rho}{\pi} + \varepsilon.$$

Свойства алгоритма

Лемма о полноте

Пусть $\varepsilon \geqslant 2\delta$. Если для графа ограничений существует присваивание, которое выполняет долю $1-\delta$ ограничений, то существует такой набор таблиц, на котором вероятность ответа «да» в тесте не меньше

$$\frac{1-\rho}{2} - \varepsilon.$$

Лемма о корректности

Существуют такие константы τ и C, зависящие от ρ, ε, что при $\delta = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ справедливо:
если для графа ограничений любое присваивание выполняет не более доли δ ограничений, то для любого набора таблиц вероятность ответа «да» в тесте не больше

$$\frac{\arccos\rho}{\pi} + \varepsilon.$$

Вывод теоремы из корректности и полноты

Теорема

Из UGC следует, что для любых ϑ, $\pi/2 < \vartheta < \pi$ и $\varepsilon > 0$ задача MAX-CUT$((1 - \cos\vartheta)/2 - \varepsilon, \vartheta/\pi + \varepsilon)$ является NP-трудной.

Выбираем

$$\delta = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C}$$

(τ, C из леммы о корректности) и m такое, что NP-трудна задача MAX-ULC$_m(1 - \delta, \delta)$. (Хот обещает, что такое m найдётся.)
Строим сводимость

$$\text{MAX-ULC}_m(1 - \delta, \delta) \leqslant_p \text{MAX-CUT}((1 - \rho)/2 - \varepsilon, \arccos\rho/\pi + \varepsilon)$$

Вывод теоремы из корректности и полноты

Теорема

Из UGC следует, что для любых ϑ, $\pi/2 < \vartheta < \pi$ и $\varepsilon > 0$ задача $\text{MAX-CUT}((1 - \cos\vartheta)/2 - \varepsilon, \vartheta/\pi + \varepsilon)$ является NP-трудной.

Выбираем

$$\delta = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C}$$

(τ, C из леммы о корректности) и m такое, что NP-трудна задача $\text{MAX-ULC}_m(1 - \delta, \delta)$. (Хот обещает, что такое m найдётся.)

Строим сводимость

$$\text{MAX-ULC}_m(1 - \delta, \delta) \leqslant_p \text{MAX-CUT}((1 - \rho)/2 - \varepsilon, \arccos\rho/\pi + \varepsilon)$$

Вывод теоремы из корректности и полноты

Теорема

Из UGC следует, что для любых ϑ, $\pi/2 < \vartheta < \pi$ и $\varepsilon > 0$ задача $\text{MAX-CUT}((1 - \cos\vartheta)/2 - \varepsilon, \vartheta/\pi + \varepsilon)$ является NP-трудной.

Выбираем

$$\delta = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C}$$

(τ, C из леммы о корректности) и m такое, что NP-трудна задача $\text{MAX-ULC}_m(1 - \delta, \delta)$. (Хот обещает, что такое m найдётся.)
Строим сводимость

$$\text{MAX-ULC}_m(1 - \delta, \delta) \leqslant_p \text{MAX-CUT}((1 - \rho)/2 - \varepsilon, \arccos\rho/\pi + \varepsilon)$$

Построение сводимости

Отображение $G(V, W, \pi) \mapsto H$ графа ограничений в граф для MAX-CUT.

Вершины H: пары (w, y), $w \in W$, $y \in \{0, 1\}^m$.
Рёбра H: такие $((w, y), (w', y'))$, что в левой доле V графа G есть общий сосед v у вершин w, w'.
Вес ребра равен вероятности получить пары (w, y), (w', y') в тесте. То есть вероятность того, что $y = \pi \circ x$, $y' = \pi' \circ x'$, где π, π' — ограничения на рёбрах (v, w), (v, w') графа ограничений G.

Наблюдение

Разрез в графе H задаёт в каждой вершине w графа G булеву функцию f_w, которая указывает, в какую долю попадает вершина (w, x). Верно и обратное: набор функций f_w задаёт разрез в графе H.

Построение сводимости

Отображение $G(V, W, \pi) \mapsto H$ графа ограничений в граф для MAX-CUT.

Вершины H: пары (w, y), $w \in W$, $y \in \{0, 1\}^m$.
Рёбра H: такие $((w, y), (w', y'))$, что в левой доле V графа G есть общий сосед v у вершин w, w'.
Вес ребра равен вероятности получить пары (w, y), (w', y') в тесте. То есть вероятность того, что $y = \pi \circ x$, $y' = \pi' \circ x'$, где π, π' — ограничения на рёбрах (v, w), (v, w') графа ограничений G.

Наблюдение

Разрез в графе H задаёт в каждой вершине w графа G булеву функцию f_w, которая указывает, в какую долю попадает вершина (w, x). Верно и обратное: набор функций f_w задаёт разрез в графе H.

Построение сводимости

Отображение $G(V, W, \pi) \mapsto H$ графа ограничений в граф для MAX-CUT.

Вершины H: пары (w, y), $w \in W$, $y \in \{0, 1\}^m$.
Рёбра H: такие $((w, y), (w', y'))$, что в левой доле V графа G есть общий сосед v у вершин w, w'.
Вес ребра равен вероятности получить пары (w, y), (w', y') в тесте. То есть вероятность того, что $y = \pi \circ x$, $y' = \pi' \circ x'$, где π, π' — ограничения на рёбрах (v, w), (v, w') графа ограничений G.

Наблюдение

Разрез в графе H задаёт в каждой вершине w графа G булеву функцию f_w, которая указывает, в какую долю попадает вершина (w, x). Верно и обратное: набор функций f_w задаёт разрез в графе H.

Корректность сводимости

Если в графе G есть присваивание, которое выполняет долю ограничений $1 - \delta$, то по лемме о полноте есть набор таблиц, на котором вероятность ответа «да» в тесте не меньше $(1 - \rho)/2 - \varepsilon$. Вес разреза, который задаётся функциями из этого набора, равен вероятности ответа «да» в тесте.

Если же в графе G все присваивания выполняют не более δ доли ограничений, лемма о корректности гарантирует, что для любого набора таблиц (разреза в H) вероятность ответа «да» (вес разреза) не больше $\arccos \rho/\pi + \varepsilon$.

Корректность сводимости

Если в графе G есть присваивание, которое выполняет долю ограничений $1 - \delta$, то по лемме о полноте есть набор таблиц, на котором вероятность ответа «да» в тесте не меньше $(1 - \rho)/2 - \varepsilon$. Вес разреза, который задаётся функциями из этого набора, равен вероятности ответа «да» в тесте.

Если же в графе G все присваивания выполняют не более δ доли ограничений, лемма о корректности гарантирует, что для любого набора таблиц (разреза в H) вероятность ответа «да» (вес разреза) не больше $\arccos \rho/\pi + \varepsilon$.

Лемма о полноте

Пусть $\sigma\colon (V \cup W) \to [m]$ удовлетворяет $(1-\delta)$ доле ограничений.
Набор таблиц: f_w является длинным кодом $\sigma(w)$.
Граф ограничений регулярен в левой доле, поэтому вероятность появления рёбер в тесте одинакова для всех рёбер.
С вероятностью не меньше $1-2\delta$ ограничения будут выполнены на обоих выбранных в тесте рёбрах (v,w), (v,w').
Далее считаем, что $\pi(\sigma(w)) = \sigma(v) = \pi'(\sigma(w'))$.

$$\begin{aligned}
\text{Проверка в тесте:}\quad & x_{\pi(\sigma(w))} = f_w(\pi\circ x) \neq f_{w'}(\pi'\circ x') = (x')_{\pi'(\sigma(w'))}\\
\text{Равносильна:}\quad & x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}\\
\text{Вероятность:}\quad & \mathop{\mathbf{Pr}}_{x'\leftarrow N_\rho(x)}[x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}] = \frac{1}{2}(1-\rho).
\end{aligned}$$

Вероятность ответа «да» в тесте не меньше

$$(1-2\delta)\cdot\frac{1-\rho}{2} = \frac{1-\rho}{2} - 2\delta\cdot\frac{1-\rho}{2} \geqslant \frac{1-\rho}{2} - \varepsilon, \qquad (\varepsilon \geqslant 2\delta).$$

Лемма о полноте

Пусть $\sigma\colon (V \cup W) \to [m]$ удовлетворяет $(1-\delta)$ доле ограничений.
Набор таблиц: f_w является длинным кодом $\sigma(w)$.
Граф ограничений регулярен в левой доле, поэтому вероятность появления рёбер в тесте одинакова для всех рёбер.
С вероятностью не меньше $1-2\delta$ ограничения будут выполнены на обоих выбранных в тесте рёбрах (v,w), (v,w').
Далее считаем, что $\pi(\sigma(w)) = \sigma(v) = \pi'(\sigma(w'))$.

Проверка в тесте: $x_{\pi(\sigma(w))} = f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x') = (x')_{\pi'(\sigma(w'))}$

Равносильна: $x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}$

Вероятность: $\Pr\limits_{x' \leftarrow N_\rho(x)}[x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}] = \frac{1}{2}(1-\rho).$

Вероятность ответа «да» в тесте не меньше

$$(1-2\delta)\cdot\frac{1-\rho}{2} = \frac{1-\rho}{2} - 2\delta\cdot\frac{1-\rho}{2} \geqslant \frac{1-\rho}{2} - \varepsilon, \qquad (\varepsilon \geqslant 2\delta).$$

Лемма о полноте

Пусть $\sigma\colon (V \cup W) \to [m]$ удовлетворяет $(1-\delta)$ доле ограничений.
Набор таблиц: f_w является длинным кодом $\sigma(w)$.
Граф ограничений регулярен в левой доле, поэтому вероятность появления рёбер в тесте одинакова для всех рёбер.
С вероятностью не меньше $1-2\delta$ ограничения будут выполнены на обоих выбранных в тесте рёбрах (v,w), (v,w').
Далее считаем, что $\pi(\sigma(w)) = \sigma(v) = \pi'(\sigma(w'))$.

Проверка в тесте: $x_{\pi(\sigma(w))} = f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x') = (x')_{\pi'(\sigma(w'))}$

Равносильна: $x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}$

Вероятность: $\displaystyle \Pr_{x' \leftarrow N_\rho(x)}[x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}] = \frac{1}{2}(1-\rho).$

Вероятность ответа «да» в тесте не меньше

$$(1-2\delta)\cdot\frac{1-\rho}{2} = \frac{1-\rho}{2} - 2\delta\cdot\frac{1-\rho}{2} \geqslant \frac{1-\rho}{2} - \varepsilon, \qquad (\varepsilon \geqslant 2\delta).$$

Лемма о полноте

Пусть $\sigma\colon (V \cup W) \to [m]$ удовлетворяет $(1-\delta)$ доле ограничений.
Набор таблиц: f_w является длинным кодом $\sigma(w)$.
Граф ограничений регулярен в левой доле, поэтому вероятность появления рёбер в тесте одинакова для всех рёбер.
С вероятностью не меньше $1-2\delta$ ограничения будут выполнены на обоих выбранных в тесте рёбрах (v,w), (v,w').
Далее считаем, что $\pi(\sigma(w)) = \sigma(v) = \pi'(\sigma(w'))$.

Проверка в тесте: $x_{\pi(\sigma(w))} = f_w(\pi \circ x) \neq f_{w'}(\pi' \circ x') = (x')_{\pi'(\sigma(w'))}$

Равносильна: $x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}$

Вероятность: $\Pr\limits_{x' \leftarrow N_\rho(x)} [x_{\sigma(v)} \neq (x')_{\sigma(v)}] = \frac{1}{2}(1-\rho).$

Вероятность ответа «да» в тесте не меньше

$$(1-2\delta)\cdot\frac{1-\rho}{2} = \frac{1-\rho}{2} - 2\delta\cdot\frac{1-\rho}{2} \geqslant \frac{1-\rho}{2} - \varepsilon, \qquad (\varepsilon \geqslant 2\delta).$$

Лемма о корректности (неформальная идея)

Рассуждение аналогично теореме Хостада. Предположим, что тест отвечает «да» с большой вероятностью. Найдём присваивание, которое выполняет большую долю ограничений.

В теореме Хостада искомое присваивание строилось с использованием коэффициентов Фурье функций, заданных таблицами.

Здесь также нужно использовать преобразование Фурье, но более сложным образом.

Неформальная идея построения такого присваивания состоит в том, чтобы выбирать его значения из «влиятельных» переменных в функциях f_w, а также вспомогательных функциях g_v для вершин в левой доле.

Лемма о корректности (неформальная идея)

Рассуждение аналогично теореме Хостада. Предположим, что тест отвечает «да» с большой вероятностью. Найдём присваивание, которое выполняет большую долю ограничений.
В теореме Хостада искомое присваивание строилось с использованием коэффициентов Фурье функций, заданных таблицами.
Здесь также нужно использовать преобразование Фурье, но более сложным образом.
Неформальная идея построения такого присваивания состоит в том, чтобы выбирать его значения из «влиятельных» переменных в функциях f_w, а также вспомогательных функциях g_v для вершин в левой доле.

Лемма о корректности (неформальная идея)

Рассуждение аналогично теореме Хостада. Предположим, что тест отвечает «да» с большой вероятностью. Найдём присваивание, которое выполняет большую долю ограничений.
В теореме Хостада искомое присваивание строилось с использованием коэффициентов Фурье функций, заданных таблицами.
Здесь также нужно использовать преобразование Фурье, но более сложным образом.
Неформальная идея построения такого присваивания состоит в том, чтобы выбирать его значения из «влиятельных» переменных в функциях f_w, а также вспомогательных функциях g_v для вершин в левой доле.

Устойчивость булевой функции к шуму

Определение

Устойчивость к шуму: $S_\rho(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \cdot f(y)], \quad f\colon \{+1,-1\}^n \to \mathbb{R}$.

Для булевых функций $f\colon \{+1,-1\}^n \to \{+1,-1\}$

$$S_\rho(f) = 1 - 2 \mathop{\mathbf{Pr}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \neq f(y)].$$

Устойчивость булевой функции к шуму

Определение

Устойчивость к шуму: $S_\rho(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \cdot f(y)], \quad f\colon \{+1,-1\}^n \to \mathbb{R}$.

Для булевых функций $f\colon \{+1,-1\}^n \to \{+1,-1\}$

$$S_\rho(f) = 1 - 2 \mathop{\mathbf{Pr}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \neq f(y)].$$

Устойчивость к шуму через коэффициенты Фурье

Лемма

$$S_\rho(f) = \langle f, T_\rho f \rangle = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}(S)^2 \cdot \rho^{|S|} \qquad \left(T_\rho f(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{y \leftarrow N_\rho(x)} [f(y)] \right).$$

Второе равенство следует из выражения оператора шума в базисе характеров $\widehat{T_\rho f}(S) = \rho^{|S|} \hat{f}(S)$ и ортогональности характеров.

Вывод первого равенства:

$$S_\rho(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \cdot f(y)] = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U} f(x) \cdot \mathop{\mathbf{E}}_{y \leftarrow N_\rho(x)} [f(y)] =$$

$$= \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U} f(x) T_\rho f(x) = \langle f, T_\rho f \rangle.$$

Неформальный смысл: для устойчивости к шуму нужно иметь «много» характеров малого веса, так как характеры больших весов дают малый вклад в устойчивость из-за множителя $\rho^{|S|}$.

Устойчивость к шуму через коэффициенты Фурье

Лемма

$$S_\rho(f) = \langle f, T_\rho f \rangle = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}(S)^2 \cdot \rho^{|S|} \qquad \Big(T_\rho f(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{y \leftarrow N_\rho(x)} [f(y)] \Big).$$

Второе равенство следует из выражения оператора шума в базисе характеров $\widehat{T_\rho f}(S) = \rho^{|S|} \hat{f}(S)$ и ортогональности характеров.
Вывод первого равенства:

$$S_\rho(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \cdot f(y)] = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U} f(x) \cdot \mathop{\mathbf{E}}_{y \leftarrow N_\rho(x)} [f(y)] =$$

$$= \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U} f(x) T_\rho f(x) = \langle f, T_\rho f \rangle.$$

Неформальный смысл: для устойчивости к шуму нужно иметь «много» характеров малого веса, так как характеры больших весов дают малый вклад в устойчивость из-за множителя $\rho^{|S|}$.

Устойчивость к шуму через коэффициенты Фурье

Лемма

$$S_\rho(f) = \langle f, T_\rho f \rangle = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}(S)^2 \cdot \rho^{|S|} \qquad \left(T_\rho f(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{y \leftarrow N_\rho(x)} [f(y)] \right).$$

Второе равенство следует из выражения оператора шума в базисе характеров $\widehat{T_\rho f}(S) = \rho^{|S|} \hat{f}(S)$ и ортогональности характеров.
Вывод первого равенства:

$$S_\rho(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{\substack{x \leftarrow U \\ y \leftarrow N_\rho(x)}} [f(x) \cdot f(y)] = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U} f(x) \cdot \mathop{\mathbf{E}}_{y \leftarrow N_\rho(x)} [f(y)] =$$
$$= \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U} f(x) T_\rho f(x) = \langle f, T_\rho f \rangle.$$

Неформальный смысл: для устойчивости к шуму нужно иметь «много» характеров малого веса, так как характеры больших весов дают малый вклад в устойчивость из-за множителя $\rho^{|S|}$.

Функция голосования и её устойчивость к шуму

$$\mathrm{Maj}_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} -1, & \text{больше половины аргументов равны } -1, \\ +1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} S_\rho(\mathrm{Maj}_n) = 1 - \frac{2 \arccos \rho}{\pi}.$$

Формула Шепарда

Пусть z_1, z_2 — две стандартные гауссовы величины с корреляцией $\mathbf{E}[z_1 z_2] = \rho$. Тогда

$$\mathbf{Pr}[z_1 \leqslant 0,\ z_2 \leqslant 0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\arccos \rho}{\pi}.$$

Функция голосования и её устойчивость к шуму

Связь с гауссовым распределением:

$$\mathrm{Maj}_n(x_1,\ldots,x_n) = \mathsf{sign}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i x_i\right).$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} S_\rho(\mathrm{Maj}_n) = 1 - \frac{2\arccos\rho}{\pi}.$$

Формула Шепарда

Пусть z_1, z_2 — две стандартные гауссовы величины с корреляцией $\mathbf{E}[z_1 z_2] = \rho$. Тогда

$$\mathbf{Pr}[z_1 \leqslant 0,\ z_2 \leqslant 0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\arccos\rho}{\pi}.$$

Влияние переменной (influence)

Определение

$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathbf{Pr}_{x \leftarrow U}[$функция f изменяется при изменении переменной $x_i]$

Лемма

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Влияние ограниченного веса

$$\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) = \sum_{\substack{|S| \leqslant C \\ S \ni i}} \hat{f}(S)^2$$

Влияние переменной (influence)

Определение

$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathbf{Pr}_{x \leftarrow U}[$функция f изменяется при изменении переменной $x_i]$

Лемма

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Влияние ограниченного веса

$$\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) = \sum_{\substack{|S| \leqslant C \\ S \ni i}} \hat{f}(S)^2$$

Влияние переменной (influence)

Определение

$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathbf{Pr}_{x \leftarrow U}$[функция f изменяется при изменении переменной x_i]

Лемма

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Влияние ограниченного веса

$$\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) = \sum_{\substack{|S| \leqslant C \\ S \ni i}} \hat{f}(S)^2$$

Вывод формулы для влияния

Частная производная

$$D_i f(x) = \frac{f\left(x\big|_{x_i:=-1}\right) - f\left(x\big|_{x_i:=+1}\right)}{2} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \Pr_{x\leftarrow U}\big[|D_i f(x)| = 1\big],$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{x\leftarrow U}[D_i f(x)^2] = \langle D_i f(x), D_i f(x)\rangle,$$

$$D_i f(x) = \sum_{S\ni i} \hat{f}(S)\chi_{S\setminus\{i\}}(x)$$

Из равенства Планшереля

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S\ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Вывод формулы для влияния

Частная производная

$$D_i f(x) = \frac{f\left(x\big|_{x_i:=-1}\right) - f\left(x\big|_{x_i:=+1}\right)}{2} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{Pr}}_{x \leftarrow U}\left[|D_i f(x)| = 1\right],$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U}[D_i f(x)^2] = \langle D_i f(x), D_i f(x) \rangle,$$

$$D_i f(x) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S) \chi_{S \setminus \{i\}}(x)$$

Из равенства Планшереля

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Вывод формулы для влияния

Частная производная

$$D_i f(x) = \frac{f\left(x\big|_{x_i:=-1}\right) - f\left(x\big|_{x_i:=+1}\right)}{2} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \Pr_{x \leftarrow U}\left[|D_i f(x)| = 1\right],$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U}[D_i f(x)^2] = \langle D_i f(x), D_i f(x) \rangle,$$

$$D_i f(x) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S) \chi_{S \setminus \{i\}}(x)$$

Из равенства Планшереля

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Вывод формулы для влияния

Частная производная

$$D_i f(x) = \frac{f\left(x\big|_{x_i:=-1}\right) - f\left(x\big|_{x_i:=+1}\right)}{2} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \Pr_{x \leftarrow U}\big[|D_i f(x)| = 1\big],$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U}[D_i f(x)^2] = \langle D_i f(x), D_i f(x)\rangle,$$

$$D_i f(x) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)\chi_{S\setminus\{i\}}(x)$$

Из равенства Планшереля

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Вывод формулы для влияния

Частная производная

$$D_i f(x) = \frac{f\left(x\big|_{x_i:=-1}\right) - f\left(x\big|_{x_i:=+1}\right)}{2} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{Pr}}_{x \leftarrow U}\left[|D_i f(x)| = 1\right],$$

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \mathop{\mathbf{E}}_{x \leftarrow U}[D_i f(x)^2] = \langle D_i f(x), D_i f(x) \rangle,$$

$$D_i f(x) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S) \chi_{S \setminus \{i\}}(x)$$

Из равенства升 Планшереля

$$\mathbf{Inf}_i(f) = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2.$$

Функция голосования — самая стабильная

Теорема (Majority is the stablest, MIS)

Для любых $0 < \rho < 1$, $\varepsilon > 0$ найдётся такое τ, что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1; 1]$ выполняются условия $\mathbf{E}[f] = 0$ и $\mathbf{Inf}_i(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$S_\rho(f) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \rho + \varepsilon.$$

Доказательство трудное, включает много анализа: концентрация меры, изопериметрия для гауссова распределения и т.п.

Функция голосования — самая стабильная

Теорема (Majority is the stablest, MIS)

Для любых $0 < \rho < 1$, $\varepsilon > 0$ найдётся такое τ, что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{E}[f] = 0$ и $\mathbf{Inf}_i(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$S_\rho(f) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \rho + \varepsilon.$$

Доказательство трудное, включает много анализа: концентрация меры, изопериметрия для гауссова распределения и т.п.

Вариант с влияниями ограниченного веса

Теорема 2

Для любых $0 < \rho < 1$, $\varepsilon > 0$ найдутся такие τ, C что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{E}[f] = 0$ и $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$S_\rho(f) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \rho + \varepsilon.$$

Сравнительно легко выводится из основной MIS теоремы.

Идея: Если f удовлетворяет условиям теоремы с влияниями ограниченного веса, то функция $g = T_\gamma f$ удовлетворяет условиям основной теоремы при подходящих значениях параметров.

Вариант с влияниями ограниченного веса

Теорема 2

Для любых $0 < \rho < 1$, $\varepsilon > 0$ найдутся такие τ, C что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1; 1]$ выполняются условия $\mathbf{E}[f] = 0$ и $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$S_\rho(f) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \rho + \varepsilon.$$

Сравнительно легко выводится из основной MIS теоремы.

Идея: Если f удовлетворяет условиям теоремы с влияниями ограниченного веса, то функция $g = T_\gamma f$ удовлетворяет условиям основной теоремы при подходящих значениях параметров.

Случай инвертирующего шума ($\rho < 0$)

Теорема 3: функция голосования самая нестабильная

Для любых $-1 < \rho < 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся такие τ, C что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$S_\rho(f) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\rho - \varepsilon.$$

Замечания

1. В этой теореме не требуется сбалансированности функции.
2. В доказательстве леммы корректности нам потребуется равносильная форма неравенства

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}S_\rho(f) \leqslant \frac{\arccos\rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Случай инвертирующего шума ($\rho < 0$)

Теорема 3: функция голосования самая нестабильная

Для любых $-1 < \rho < 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся такие τ, C что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то
$$S_\rho(f) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\rho - \varepsilon.$$

Замечания

1. В этой теореме не требуется сбалансированности функции.
2. В доказательстве леммы корректности нам потребуется равносильная форма неравенства
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}S_\rho(f) \leqslant \frac{\arccos\rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Случай инвертирующего шума ($\rho < 0$)

Теорема 3: функция голосования самая нестабильная

Для любых $-1 < \rho < 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся такие τ, C что если для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1; 1]$ выполняются условия $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$S_\rho(f) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \rho - \varepsilon.$$

Замечания

1. В этой теореме не требуется сбалансированности функции.
2. В доказательстве леммы корректности нам потребуется равносильная форма неравенства

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(f) \leqslant \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вывод теоремы 3 из теоремы 2

Пусть $-1 < \rho < 0$ и для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.
Рассмотрим нечётную часть

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \sum_{|S|\ \text{нечётна}} \hat{f}(S)\chi_S(x).$$

Для неё выполняются $\mathbf{E}[g] = 0$ и

$$\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(g) = \sum_{\substack{|S|\ \text{нечётна} \\ |S| \leqslant C}} \hat{f}(S)^2 \leqslant \sum_{|S| \leqslant C} \hat{f}(S)^2 = \mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau.$$

Поэтому к функции g применима теорема 2 для $-\rho$:

$$-S_\rho(g) = S_{-\rho}(g) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(-\rho) + \varepsilon.$$

Но $S_\rho(f) \geqslant S_\rho(g) \geqslant -1 + \dfrac{2}{\pi}\arccos(-\rho) - \varepsilon = 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos\rho - \varepsilon.$

Вывод теоремы 3 из теоремы 2

Пусть $-1 < \rho < 0$ и для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.
Рассмотрим нечётную часть

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \sum_{|S| \text{ нечётна}} \hat{f}(S)\chi_S(x).$$

Для неё выполняются $\mathbf{E}[g] = 0$ и

$$\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(g) = \sum_{\substack{|S| \text{ нечётна} \\ |S| \leqslant C}} \hat{f}(S)^2 \leqslant \sum_{|S| \leqslant C} \hat{f}(S)^2 = \mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau.$$

Поэтому к функции g применима теорема 2 для $-\rho$:

$$-S_\rho(g) = S_{-\rho}(g) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(-\rho) + \varepsilon.$$

Но $S_\rho(f) \geqslant S_\rho(g) \geqslant -1 + \frac{2}{\pi}\arccos(-\rho) - \varepsilon = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\rho - \varepsilon.$

Вывод теоремы 3 из теоремы 2

Пусть $-1 < \rho < 0$ и для функции $f\colon \{\pm 1\}^n \to [-1;1]$ выполняются условия $\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.
Рассмотрим нечётную часть

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \sum_{|S| \text{ нечётна}} \hat{f}(S)\chi_S(x).$$

Для неё выполняются $\mathbf{E}[g] = 0$ и

$$\mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(g) = \sum_{\substack{|S| \text{ нечётна} \\ |S| \leqslant C}} \hat{f}(S)^2 \leqslant \sum_{|S| \leqslant C} \hat{f}(S)^2 = \mathbf{Inf}_i^{\leqslant C}(f) \leqslant \tau.$$

Поэтому к функции g применима теорема 2 для $-\rho$:

$$-S_\rho(g) = S_{-\rho}(g) \leqslant 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(-\rho) + \varepsilon.$$

Но $S_\rho(f) \geqslant S_\rho(g) \geqslant -1 + \dfrac{2}{\pi}\arccos(-\rho) - \varepsilon = 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos\rho - \varepsilon.$

Лемма о корректности: шаг 1

Что хотим доказать:

если на наборе таблиц $\{f_w\}$ тест даёт ответ «да» с вероятностью не меньше $\arccos \rho/\pi + \varepsilon$, то существует присваивание $\sigma : (V \cup W) \to [m]$, которое удовлетворяет доле $\geqslant \delta$ ограничений.

Утверждение (аналогично неравенству Маркова)

Для $\geqslant \varepsilon/2$ доли вершин из V тест успешен с вероятностью больше $\arccos \rho/\pi + \varepsilon/2$.

В противном случае общая вероятность ответа «да» не больше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(\frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\arccos \rho}{\pi} + \varepsilon.$$

Хорошие вершины в левой доле

Те вершины из V, на которых вероятность успеха $> \arccos \rho/\pi + \varepsilon/2$

Лемма о корректности: шаг 1

Что хотим доказать:

если на наборе таблиц $\{f_w\}$ тест даёт ответ «да» с вероятностью не меньше $\arccos \rho/\pi + \varepsilon$, то существует присваивание $\sigma \colon (V \cup W) \to [m]$, которое удовлетворяет доле $\geqslant \delta$ ограничений.

Утверждение (аналогично неравенству Маркова)

Для $\geqslant \varepsilon/2$ доли вершин из V тест успешен с вероятностью больше $\arccos \rho/\pi + \varepsilon/2$.

В противном случае общая вероятность ответа «да» не больше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(\frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\arccos \rho}{\pi} + \varepsilon.$$

Хорошие вершины в левой доле

Те вершины из V, на которых вероятность успеха $> \arccos \rho/\pi + \varepsilon/2$

Лемма о корректности: шаг 1

Что хотим доказать:

если на наборе таблиц $\{f_w\}$ тест даёт ответ «да» с вероятностью не меньше $\arccos\rho/\pi+\varepsilon$, то существует присваивание $\sigma\colon (V\cup W)\to[m]$, которое удовлетворяет доле $\geqslant\delta$ ограничений.

Утверждение (аналогично неравенству Маркова)

Для $\geqslant\varepsilon/2$ доли вершин из V тест успешен с вероятностью больше $\arccos\rho/\pi+\varepsilon/2$.

В противном случае общая вероятность ответа «да» не больше

$$\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\left(\frac{\arccos\rho}{\pi}+\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\arccos\rho}{\pi}+\varepsilon.$$

Хорошие вершины в левой доле

Те вершины из V, на которых вероятность успеха $>\arccos\rho/\pi+\varepsilon/2$

Лемма о корректности: шаг 1

Что хотим доказать:

если на наборе таблиц $\{f_w\}$ тест даёт ответ «да» с вероятностью не меньше $\arccos\rho/\pi+\varepsilon$, то существует присваивание $\sigma\colon(V\cup W)\to[m]$, которое удовлетворяет доле $\geqslant\delta$ ограничений.

Утверждение (аналогично неравенству Маркова)

Для $\geqslant\varepsilon/2$ доли вершин из V тест успешен с вероятностью больше $\arccos\rho/\pi+\varepsilon/2$.

В противном случае общая вероятность ответа «да» не больше

$$\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\left(\frac{\arccos\rho}{\pi}+\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\arccos\rho}{\pi}+\varepsilon.$$

Хорошие вершины в левой доле

Те вершины из V, на которых вероятность успеха $>\arccos\rho/\pi+\varepsilon/2$

Лемма о корректности: шаг 2

Вспомогательные функции в вершинах левой доли

Через U_v обозначим равномерное распределение на соседях вершины v. Тогда

$$g_v(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} [f_w(\pi_{v,w} \circ x)].$$

Если присваивание σ выполняет ограничения на всех рёбрах, выходящих из v, и все f_w являются длинными кодами $\sigma(w)$, то g_v является длинным кодом $\sigma(v)$:

$$\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} [x_{\pi_{v,w}(\sigma(w))}] = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} [x_{\sigma(v)}] = x_{\sigma(v)}.$$

В общем случае это какое-то приближение к длинному коду присваивания в вершине v.

Лемма о корректности: шаг 2

Вспомогательные функции в вершинах левой доли

Через U_v обозначим равномерное распределение на соседях вершины v. Тогда

$$g_v(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[f_w(\pi_{v,w} \circ x)].$$

Если присваивание σ выполняет ограничения на всех рёбрах, выходящих из v, и все f_w являются длинными кодами $\sigma(w)$, то g_v является длинным кодом $\sigma(v)$:

$$\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[x_{\pi_{v,w}(\sigma(w))}] = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[x_{\sigma(v)}] = x_{\sigma(v)}.$$

В общем случае это какое-то приближение к длинному коду присваивания в вершине v.

Лемма о корректности: шаг 2

Вспомогательные функции в вершинах левой доли

Через U_v обозначим равномерное распределение на соседях вершины v. Тогда

$$g_v(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} [f_w(\pi_{v,w} \circ x)].$$

Если присваивание σ выполняет ограничения на всех рёбрах, выходящих из v, и все f_w являются длинными кодами $\sigma(w)$, то g_v является длинным кодом $\sigma(v)$:

$$\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} [x_{\pi_{v,w}(\sigma(w))}] = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} [x_{\sigma(v)}] = x_{\sigma(v)}.$$

В общем случае это какое-то приближение к длинному коду присваивания в вершине v.

Лемма о корректности: шаг 3

Вероятность успеха теста в выбранной вершине $v \in V$:

$$\mathbf{Pr}[\text{ответ «да»}] = \mathop{\mathbf{Pr}}_{x,x',w,w'}[f_w(\pi \circ x) f_{w'}(\pi' \circ x') = -1] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} \mathop{\mathbf{E}}_{w,w'} [f_w(\pi \circ x) f_{w'}(\pi' \circ x')] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} [g_v(x) g_v(x')] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v)$$

В хорошей вершине

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) > \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$ противоречит неравенству из теоремы о самой нестабильной $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) \leqslant \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит, у функции g_v есть влиятельные переменные малого веса.

Пусть j_v — такая переменная, то есть $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$.

Для диктатора $g_v(x) = x_j$ будет выбрано именно j (у остальных влияние 0)

Лемма о корректности: шаг 3

Вер

Вершины w, w' выбираются независимо

$x' \leftarrow N_\rho(x)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} \mathop{\mathbf{E}}_{w,w'} [f_w(\pi \circ x) f_{w'}(\pi' \circ x')] =$$

$$\mathbf{Pr}[\text{ответ «да»}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} [g_v(x) g_v(x')] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v)$$

В хорошей вершине

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) > \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$ противоречит неравенству из теоремы о самой нестабильной $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) \leqslant \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит, у функции g_v есть влиятельные переменные малого веса.

Пусть j_v — такая переменная, то есть $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$.

Для диктатора $g_v(x) = x_j$ будет выбрано именно j (у остальных влияние 0).

Лемма о корректности: шаг 3

Вероятность успеха теста в выбранной вершине $v \in V$:

$$\mathbf{Pr}[\text{ответ «да»}] = \mathop{\mathbf{Pr}}_{x,x',w,w'}[f_w(\pi \circ x) f_{w'}(\pi' \circ x') = -1] =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} \mathop{\mathbf{E}}_{w,w'} [f_w(\pi \circ x) f_{w'}(\pi' \circ x')] =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} [g_v(x) g_v(x')] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v)$$

В хорошей вершине

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) > \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$ противоречит неравенству из теоремы о самой нестабильной $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) \leqslant \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Значит, у функции g_v есть влиятельные переменные малого веса.
Пусть j_v — такая переменная, то есть $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$.
Для диктатора $g_v(x) = x_j$ будет выбрано именно j (у остальных влияние 0).

Лемма о корректности: шаг 3

В искомом присваивании, выполняющем много ограничений

$\sigma(v) = j_v$ — выбираем одну из влиятельных переменных.

$$=\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} \mathop{\mathbf{E}}_{w,w'} [f_w(\pi \circ x) f_{w'}(\pi' \circ x')] =$$

$$=\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathbf{E}}_{x,x'} [g_v(x) g_v(x')] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v)$$

В хорошей вершине

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) > \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$ противоречит неравенству из теоремы о самой нестабильной $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_\rho(g_v) \leqslant \frac{\arccos \rho}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит, у функции g_v есть влиятельные переменные малого веса.

Пусть j_v — такая переменная, то есть $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$.

Для диктатора $g_v(x) = x_j$ будет выбрано именно j (у остальных влияние 0).

Лемма о корректности: шаг 4

Преобразование Фурье функции $f_w(\pi \circ x)$:

$$f_w(\pi \circ x) = \sum_S \hat{f}_w(S)\chi_S(\pi \circ x) = \sum_S \hat{f}_w(S)\chi_{\pi(S)}(x) = \\ = \sum_T \hat{f}_w(\pi^{-1}(T))\chi_T(x)$$

Подставим полученные выражения в определение функций g_v и воспользуемся линейностью матожидания

$$g_v(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[f_w(\pi_{v,w} \circ x)] = \sum_T \left(\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(T))] \right) \chi_T(x).$$

Лемма о корректности: шаг 4

Преобразование Фурье функции $f_w(\pi \circ x)$:

$$f_w(\pi \circ x) = \sum_S \hat{f}_w(S)\chi_S(\pi \circ x) = \sum_S \hat{f}_w(S)\chi_{\pi(S)}(x) = \\ = \sum_T \hat{f}_w(\pi^{-1}(T))\chi_T(x)$$

Подставим полученные выражения в определение функций g_v и воспользуемся линейностью матожидания

$$g_v(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[f_w(\pi_{v,w} \circ x)] = \sum_T \left(\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}[\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(T))] \right) \chi_T(x).$$

Лемма о корректности: шаг 5

Оценка влияний функций f_w для соседей хорошей вершины:

$$\tau \leqslant \mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] = \sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \hat{g}_v(S)^2 = \sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \left(\mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} [\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))] \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))^2\right] = \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))^2 \right] =$$

$$= \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\mathbf{Inf}_{\pi_{v,w}^{-1}(j_v)}^{\leqslant C}(f_w) \right].$$

Лемма о корректности: шаг 5

Оценка влияний функций f_w для соседей хорошей вершины:

$$\tau \leqslant \mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] = \sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \hat{g}_v(S)^2 = \sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \left(\mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} [\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))] \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))^2 \right] = \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\sum_{\substack{|S|\leqslant C\\ S\ni j_v}} \hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))^2 \right] =$$

$$= \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\mathbf{Inf}_{\pi_{v,w}^{-1}(j_v)}^{\leqslant C}(f_w) \right].$$

Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным

Лемма о корректности: шаг 5

Оценка влияний функций f_w для соседей хорошей вершины:

$$\tau \leqslant \mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] = \sum_{\substack{|S|\leqslant C \\ S\ni j_v}} \hat{g}_v(S)^2 = \sum_{\substack{|S|\leqslant C \\ S\ni j_v}} \left(\mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} [\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))] \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|S|\leqslant C \\ S\ni j_v}} \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))^2 \right] = \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\sum_{\substack{|S|\leqslant C \\ S\ni j_v}} \hat{f}_w(\pi_{v,w}^{-1}(S))^2 \right] =$$

$$= \mathop{\mathbf{E}}_{w\leftarrow U_v} \left[\mathbf{Inf}_{\pi_{v,w}^{-1}(j_v)}^{\leqslant C}(f_w) \right].$$

Лемма о корректности: шаг 6

Получили на предыдущем шаге

$$\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}\left[\mathbf{Inf}^{\leqslant C}_{\pi^{-1}_{v,w}(j_v)}(f_w)\right] \geqslant \tau.$$

Значит, для доли $\geqslant \tau/2$ соседей w хорошей вершины v у функции f_w влияние веса $\leqslant C$ по переменной $\pi^{-1}_{v,w}(j_v)$ не меньше $\tau/2$. (Аналогично шагу 1.)

Назовём таких соседей «хорошими».

Обозначение множества влиятельных переменных

$S_w = \{k : \mathbf{Inf}^{\leqslant C}_k(f_w) \geqslant \tau/2\}$.

Лемма о корректности: шаг 6

Получили на предыдущем шаге

$$\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v} \left[\mathbf{Inf}^{\leqslant C}_{\pi^{-1}_{v,w}(j_v)}(f_w) \right] \geqslant \tau.$$

Значит, для доли $\geqslant \tau/2$ соседей w хорошей вершины v у функции f_w влияние веса $\leqslant C$ по переменной $\pi^{-1}_{v,w}(j_v)$ не меньше $\tau/2$. (Аналогично шагу 1.)

Назовём таких соседей «хорошими».

Обозначение множества влиятельных переменных

$S_w = \{k : \mathbf{Inf}^{\leqslant C}_k(f_w) \geqslant \tau/2\}$.

Лемма о корректности: шаг 6

Получили на предыдущем шаге

$$\mathop{\mathbf{E}}_{w \leftarrow U_v}\left[\mathbf{Inf}^{\leqslant C}_{\pi^{-1}_{v,w}(j_v)}(f_w)\right] \geqslant \tau.$$

Значит, для доли $\geqslant \tau/2$ соседей w хорошей вершины v у функции f_w влияние веса $\leqslant C$ по переменной $\pi^{-1}_{v,w}(j_v)$ не меньше $\tau/2$. (Аналогично шагу 1.)

Назовём таких соседей «хорошими».

Обозначение множества влиятельных переменных

$S_w = \{k : \mathbf{Inf}^{\leqslant C}_k(f_w) \geqslant \tau/2\}$.

Лемма о корректности: шаг 7

Лемма

Для любой функции h выполняется $\left|\{k : \mathbf{Inf}_k^{\leqslant C}(h) \geqslant \eta\}\right| \leqslant C/\eta$.

Доказательство

Оценим сумму всех влияний ограниченной степени, используя выражение влияний через коэффициенты Фурье:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{Inf}_k^{\leqslant C}(h) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{|S| \leqslant C \\ S \ni k}} \hat{h}(S)^2 = \sum_{|S| \leqslant C} |S| \hat{h}(S)^2 \leqslant C \sum_{S} \hat{h}(S)^2 = C.$$

Отсюда следует неравенство леммы аналогично неравенству Маркова.

Следствие для множества влиятельных переменных

$|S_w| \leqslant 2C/\tau$.

Лемма о корректности: шаг 7

Лемма

Для любой функции h выполняется $\left|\{k : \mathbf{Inf}_k^{\leqslant C}(h) \geqslant \eta\}\right| \leqslant C/\eta$.

Доказательство

Оценим сумму всех влияний ограниченной степени, используя выражение влияний через коэффициенты Фурье:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{Inf}_k^{\leqslant C}(h) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{|S| \leqslant C \\ S \ni k}} \hat{h}(S)^2 = \sum_{|S| \leqslant C} |S| \hat{h}(S)^2 \leqslant C \sum_{S} \hat{h}(S)^2 = C.$$

Отсюда следует неравенство леммы аналогично неравенству Маркова.

Следствие для множества влиятельных переменных

$|S_w| \leqslant 2C/\tau.$

Лемма о корректности: шаг 7

Лемма

Для любой функции h выполняется $\left|\{k : \mathbf{Inf}_k^{\leqslant C}(h) \geqslant \eta\}\right| \leqslant C/\eta$.

Доказательство

Оценим сумму всех влияний ограниченной степени, используя выражение влияний через коэффициенты Фурье:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{Inf}_k^{\leqslant C}(h) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{|S| \leqslant C \\ S \ni k}} \hat{h}(S)^2 = \sum_{|S| \leqslant C} |S| \hat{h}(S)^2 \leqslant C \sum_{S} \hat{h}(S)^2 = C.$$

Отсюда следует неравенство леммы аналогично неравенству Маркова.

Следствие для множества влиятельных переменных

$|S_w| \leqslant 2C/\tau$.

Лемма о корректности: шаг 8

Искомое присваивание:

в вершинах левой доли $\sigma(v) = j_v$, где $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$;
в вершинах правой доли $\sigma(w) = j \leftarrow S_w$ (равновозможно).

Последнее утверждение

Матожидание выполненных ограничений на присваивании σ не меньше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\tau}{2C} = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} = \delta\,.$$

Первый множитель — доля хороших вершин в левой доле.
Второй — доля хороших соседей в правой доле у хорошей вершины в левой доле. У хорошего соседа $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v)) \in S_w$.
Третий множитель оценивает вероятность выбрать в качестве значения присваивания $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v))$ (выбираем из множества, в котором не больше $2C/\tau$ элементов).

Лемма о корректности: шаг 8

Искомое присваивание:

в вершинах левой доли $\sigma(v) = j_v$, где $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$;
в вершинах правой доли $\sigma(w) = j \leftarrow S_w$ (равновозможно).

Последнее утверждение

Матожидание выполненных ограничений на присваивании σ не меньше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\tau}{2C} = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} = \delta\ .$$

Первый множитель — доля хороших вершин в левой доле.
Второй — доля хороших соседей в правой доле у хорошей вершины в левой доле. У хорошего соседа $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v)) \in S_w$.
Третий множитель оценивает вероятность выбрать в качестве значения присваивания $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v))$ (выбираем из множества, в котором не больше $2C/\tau$ элементов).

Лемма о корректности: шаг 8

Искомое присваивание:

в вершинах левой доли $\sigma(v) = j_v$, где $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$;
в вершинах правой доли $\sigma(w) = j \leftarrow S_w$ (равновозможно).

Последнее утверждение

Матожидание выполненных ограничений на присваивании σ не меньше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\tau}{2C} = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} = \delta\ .$$

Первый множитель — доля хороших вершин в левой доле.
Второй — доля хороших соседей в правой доле у хорошей вершины в левой доле. У хорошего соседа $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v)) \in S_w$.
Третий множитель оценивает вероятность выбрать в качестве значения присваивания $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v))$ (выбираем из множества, в котором не больше $2C/\tau$ элементов).

Лемма о корректности: шаг 8

Искомое присваивание:

в вершинах левой доли $\sigma(v) = j_v$, где $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$;
в вершинах правой доли $\sigma(w) = j \leftarrow S_w$ (равновозможно).

Последнее утверждение

Матожидание выполненных ограничений на присваивании σ не меньше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\tau}{2C} = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} = \delta\ .$$

Первый множитель — доля хороших вершин в левой доле.
Второй — доля хороших соседей в правой доле у хорошей вершины в левой доле. У хорошего соседа $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v)) \in S_w$.
Третий множитель оценивает вероятность выбрать в качестве значения присваивания $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v))$ (выбираем из множества, в котором не больше $2C/\tau$ элементов).

Лемма о корректности: шаг 8

Искомое присваивание:

в вершинах левой доли $\sigma(v) = j_v$, где $\mathbf{Inf}_{j_v}^{\leqslant C}[g_v] \geqslant \tau$;
в вершинах правой доли $\sigma(w) = j \leftarrow S_w$ (равновозможно).

Последнее утверждение

Матожидание выполненных ограничений на присваивании σ не меньше

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\tau}{2C} = \frac{\varepsilon\tau^2}{8C} = \delta\ .$$

Первый множитель — доля хороших вершин в левой доле.
Второй — доля хороших соседей в правой доле у хорошей вершины в левой доле. У хорошего соседа $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v)) \in S_w$.
Третий множитель оценивает вероятность выбрать в качестве значения присваивания $\pi_{v,w}^{-1}(\sigma(v))$ (выбираем из множества, в котором не больше $2C/\tau$ элементов).