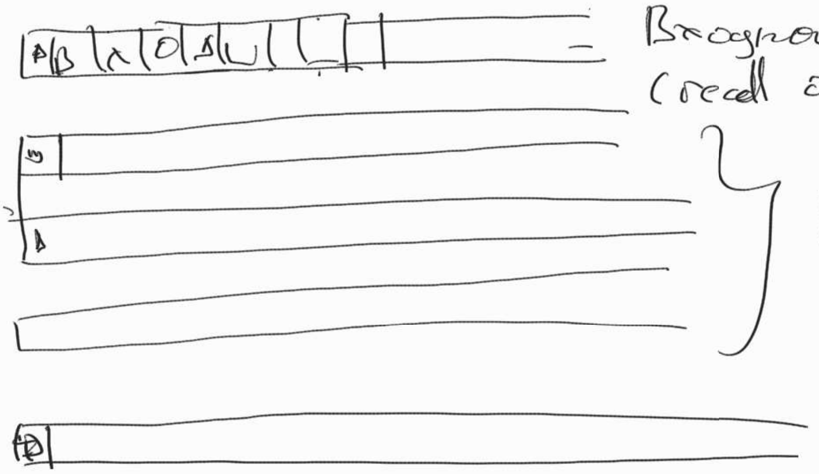
§ Вычисления с ограничениями по памяти.

Многолент. М.Т.

$DSpace[\log n]$

$\uparrow$

нельзя уйти правее первого пробела



Входная (read only)

рабочие ленты

будет

дно

выходная лента

головку нельзя двигать влево

Память М.Т. — максим. положение головки на раб. лентах

$DSpace[f(n)]$ — мн-во языков, которые можно распознать на многолент. М.Т. с исп. $O(f(n))$ памяти, где n — длина входа

$NSpace[f(n)]$ —||— НМТ.

память — максим. по всем Н.М.Т.

$PSPACE = \bigcup_{c>0} DSPACE[n^c]$ $\quad NPSPACE = \bigcup_c NSPACE[n^c]$

$L = DSpace[\log n]$ $\quad NL = NSPACE[\log n]$

Утв. $\forall$ ф-ции $s(n)$ $\quad DTime[s(n)] \subseteq DSpace[s(n)] \subseteq NSpace[s(n)]$

Опр. Функция $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ наз-ся конструкт. по памяти, если $n \mapsto 1^{s(n)}$ можно с исп. $O(s(n))$ памяти.

Теорема Пусть $s(n)$ — конструкт. по памяти.

Тогда $NTime[s(n)] \underset{*}{\subseteq} NSPACE[s(n)] \subseteq DTime[2^{O(s(n))} poly(n)] \overset{**}{=} \bigcup_c DTime[2^{c \cdot s(n)} \cdot n^c]$

Сл-е $NPSPACE \subseteq EXP$

Д-во (*) очевидно

(**) Граф конфигураций Н.М.Т.

Конфигур. М.Т.

- Положения головок на всех лентах $O(n \cdot s(n))^k$
- Текущее состояние $O(1)$
- Содержимое рабочих лент. $O(s(n))$

Число конфигураций $2^{O(s(n)+\log n)}$

Каждая конфигурация задаётся строкой длины $O(s(n)+\log n)$

$$K_1 \longrightarrow K_2$$

за один шаг.
раб. на входе x

$$x \longmapsto G_x$$

$$K_1 \longrightarrow K_2$$
$$K_1 \longrightarrow$$

$L \in NSPACE[s(n)]$

L реш. Н.М.Т. M, исп. $O(s(n))$ ячеек памяти.

x — fix x $\qquad G_x$ — граф конф.

$|x| = n$

$$K_0 \longrightarrow K_{yes}$$

$$\mathrm{poly}\left(2^{O(s(n))+\log n}\right)$$

$s(n)$ $\qquad O(s(n))$

$2^{O(S(n))}$ шагов.

$L \subseteq NL \subseteq P$

$NSPACE[\log n] \subseteq P$

$S(n) \geq \log n$

Теорема (Савич) Если $S(n)$ констр. по памяти, то $NSPACE[S(n)] \subseteq DSPACE[(S(n))^2]$

Сл-ие $PSPACE = NPSPACE$

Д-во $L \in NSPACE[S(n)]$ — распознается

НМТ M, исп. $O(S(n))$ ячеек памяти

$O(S(n))$

$2^{O(S(n))}$ вершин

$K_0 \longrightarrow K_{accept}$

$PATH(u, v, i) = \begin{cases} 1, & \text{если из } u \text{ в } v \text{ есть путь длины} \leq 2^i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$PATH(K_0, K_{accept}, c \cdot S(n))$

$PATH(u, v, i)$: перебирать все z и проверять $PATH(u, z, i-1) \wedge PATH(z, v, i-1)$

$PATH(u, v, 0)$ наличие ребра

$\xleftarrow{S(n)}$

(u, v, i)

$(u, z, i-1)$

$(z, z', i-2)$

$c \cdot S(n)$

$O(S(n)^2)$

$L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq NPSPACE = PSPACE$

$\subseteq EXP$

PSPACE

Язык кванторных пропозициональных формул

$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

$\vee, \wedge, \neg$

$\exists x_1 \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) \vee \varphi(1, x_2, \ldots, x_n)$

$\forall x \exists y (\neg x \vee y)$

TQBF — язык истинных кванторных пропозиц. формул.

$SAT \leq_p TQBF \quad \varphi \mapsto \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$

$\underbrace{\exists x_1, \forall x_2,}$ $\exists x_3$ $- - -$ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$

$E \quad A$

<u>Теорема</u> TQBF является PSPACE полным языком.

<u>Д-во</u> 1) $\underbrace{\text{TQBF} \in \text{PSPACE}}_{\exists}$ $\forall$

Qx, φ

$\varphi[x_2 = 1]$

$\underline{\varphi[x_1 = 0]}$

2) TQBF PSPACE трудный

$\triangle$ $L \in$ PSPACE

L реш. М.Т. M, пот. исп. $\leq p(n)$ памяти

$K_1 \longmapsto K_2 \to K_3$

Граф конфигураций

$\boxed{\text{O}(p(n)) \text{ битов на конфиг.}}$

$x \longmapsto G_x$?

$K_0 \rightsquigarrow$? K_{acc} L

$$\text{PATH}(u, v, i) = \begin{cases} 1, & \text{если из } u \text{ в } v \text{ есть путь длины } \leq 2^i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{PATH}(u, v, i) = \exists z \; \text{PATH}(u, z, i-1) \\ \qquad \wedge \; \text{PATH}(z, v, i-1) \end{array}\right.$$

$\text{PATH}(u, v, 0) \leftarrow$

$$PATH(u, v, i) = \exists z\, \forall a\, \forall b\, \Big(\big((a = u) \wedge (b = z)\big) \vee (a = z \wedge b = v) \Big) \to \underline{PATH}(a, b, i-1)$$

$$PATH(u, v, 0)$$

$$C(u, v) = 1$$

$$\exists z_1 \ldots z_n\, \varphi(u, v, \underbrace{z_1 \ldots z_n}_{})$$

внутр. верш. схемы

$L \quad NL$

$NL \quad coNL$

$$\underline{P \overset{?}{=} PSPACE}$$